

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Новосибирский государственный университет

Физический факультет  
Кафедра Квантовой оптики

**Л. В. Ильичёв**

**ОСНОВЫ  
КВАНТОВОЙ ОПТИКИ**

Курс лекций

Новосибирск  
2013

УДК 539.1.01  
ББК (В)22,314  
И 468

**Ильичёв Л. В.** Основы квантовой оптики: Курс лекций / Новосибирский государственный университет; Институт автоматизации и электрометрии СО РАН. Новосибирск, 2013. 115 с.

Курс лекций "Основы квантовой оптики базовый для магистрантов кафедры Квантовой оптики и кафедры Квантовой электроники Новосибирского государственного университета, является также общим курсом для магистрантов-физиков первого года обучения. Освоение материала настоящего курса вместе со его второй половиной – "Современными проблемами квантовой оптики" позволяет понимать материал основной массы оригинальных работ по квантовой оптике. Изложен современный взгляд на некоторые актуальные проблемы, слабо отражённые в отечественной литературе. Разбиение курса на 13 лекций преследовало исключительно цели объединения тематически близкого материала. Чтение лекций для аудитории занимает 36 часов.

Курс рассчитан на студентов и аспирантов, обучающихся по специальностям, связанным с квантовой оптикой. Он может быть полезным и для молодых специалистов, работающих в этой области.

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

© Новосибирский государственный университет, 2013

© Ильичёв Л.В., 2013

# Оглавление

1	Лекция 1 . . . . .	5
2	Лекция 2 . . . . .	17
3	Лекция 3 . . . . .	29
4	Лекция 4 . . . . .	41
5	Лекция 5 . . . . .	49
6	Лекция 6 . . . . .	55
7	Лекция 7 . . . . .	63
8	Лекция 8 . . . . .	69
9	Лекция 9 . . . . .	76
10	Лекция 10 . . . . .	84
11	Лекция 11 . . . . .	91
12	Лекция 12 . . . . .	98
13	Лекция 13 . . . . .	109
	Список рекомендуемой литературы . . . . .	127



# 1 Лекция 1

**Флуктуации в классической стохастической оптике.** Нашим предметом на первых порах будет случайный классический оптический сигнал. Мы рассматриваем оптическое поле в некоторой фиксированной точке пространства как функцию времени. Мы отвлекаемся пока от векторного характера электромагнитного поля и имеем дело со скалярной действительной функцией  $E(t)$ . Естественен вопрос о природе случайности сигнала  $E(t)$ . Этот сигнал был порождён некоторым источником и преодолел определённое расстояние до места регистрации. И при генерации, и при распространении он подвергался многочисленным случайным воздействиям. В зависимости от характера исследуемой проблемы наиболее интересными могут оказаться те или иные факторы случайности. Источник имеет обычно макроскопическую природу и состоит из большого числа ( $\sim 10^{23}$ ) излучателей – атомов или молекул<sup>1</sup>. Мы не можем проследить историю возбуждений и девозбуждений каждого элементарного излучателя. В нашей власти контролировать только ограниченное число макроскопических параметров. Например, в случае газового лазера это геометрические параметры его конструкции, параметры зеркал резонатора, состав газовой смеси и параметры разряда. Ясно, что огромное "море" информации, недостающей для полного описания состояния источника, диктует необходимость обращения к статистическим усреднениям. Мы будем всегда иметь ввиду статистический ансамбль – в пределе бесконечную совокупность ис-

---

<sup>1</sup>В настоящее время уровень технологии позволяет работать с отдельными элементарными излучателями. В этом случае стохастичность имеет в основном квантовую природу и о ней пойдёт речь в следующих лекциях

точников единой конструкции и поддерживаемых при одинаковых параметрах (см. рис. 1).

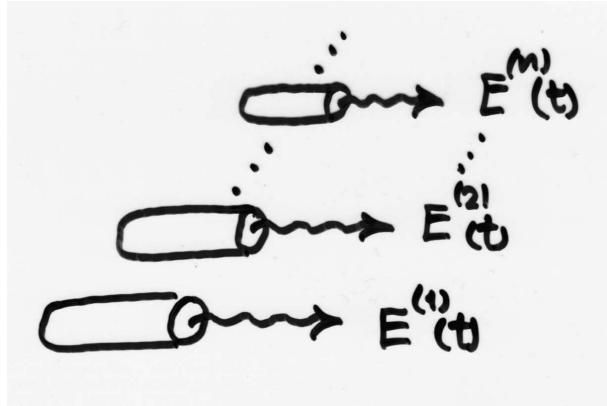


Рис. 1.

Все характеристики излучения, о которых уместно рассуждать, предполагаются усреднёнными по ансамблю. Это усреднение будет обозначаться угловыми скобками:

$$\langle \dots \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dots \quad (1)$$

Другой важный аспект – проявление случайности во временном поведении сигнала. Действительно, представленная модель статистического ансамбля допускает воображаемую ситуацию, когда сигналы, генерируемые отдельными источниками, имеют вполне регулярную природу и различаются, например, только фазами:

$$E^{(n)}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_n). \quad (2)$$

В реальной жизни всё обстоит иначе и форма каждого сигнала  $E^{(n)}(t)$  демонстрирует нерегулярность (флуктуации). Оптический сигнал, однако, имеет важную особенность, отличающую его от, например, радиочастотного сигнала. А именно, несущая оптическая частота  $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  обычно значительно превышает обратный временной масштаб флуктуаций  $\tau_0^{-1}$ :

$$\frac{1}{\tau_0} \ll \omega_0. \quad (3)$$

Для нелазерных источников излучения этот масштаб определяется характерным атомным временем  $\sim 10^{-9} \text{ s}$ , т.е. временем спонтанной релаксации отдельного элементарного излучателя.

Реальный экспериментальный прибор в оптической лаборатории реагирует на интенсивность излучения  $\sim E^2(t)$ , усреднённую по некоторому характерному для данного прибора времени  $T_0$ :

$$I(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t E^2(t') dt'. \quad (4)$$

Время  $T_0$  всегда значительно превосходит оптический период  $\omega_0^{-1}$ :

$$\frac{1}{T_0} \ll \omega_0. \quad (5)$$

Соотношение времён  $\tau_0$  и  $T_0$  может быть в общем случае различным. Ясно, что для полноценного исследования флуктуаций необходимо выполнение неравенства

$$T_0 \ll \tau_0. \quad (6)$$

**Аналитический сигнал.** Усреднение (4) при условии (5) является спецификой оптики. Для "автоматического" выполнения этого усреднения крайне полезным оказывается

математическое понятие *аналитического сигнала* (D.Gabor). Представим  $E(t)$  в виде интеграла Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7)$$

и введём две новые функции времени:

$$\begin{aligned} E^{(+)}(t) &\doteq \int_0^{\infty} E_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ E^{(-)}(t) &\doteq \int_{-\infty}^0 E_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

путём интегрирования отдельно по положительной и отрицательной полуосям частот. Ясно, что исходный сигнал есть сумма новых:

$$E(t) = E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t). \quad (9)$$

Поскольку  $E(t)$  – действительная функция времени, имеем связь  $E^{(+)}(t)$  и  $E^{(-)}(t)$ :

$$E^{(-)}(t) = E^{(+)}(t)^*. \quad (10)$$

Сигнал  $E^{(+)}(t)$  ( $E^{(-)}(t)$ ) называется положительнoчастотным (отрицательнoчастотным) аналитическим сигналом. Последнее прилагательное отражает факт голоморфности (аналитичности)  $E^{(+)}(t)$  в нижней полуплоскости комплексного времени. Действительно, замена  $t$  на  $t - i\varepsilon$  при  $\varepsilon > 0$  обеспечивает сходимость первого интеграла в (8). Все особенности  $E^{(+)}(t)$  лежат в верхней полуплоскости. Аналогично функция  $E^{(-)}(t)$  аналитична в верхней полуплоскости.

Рассмотрим типичный пример с введением аналитических сигналов, демонстрирующий их важность. Пусть напряжённость оптического поля  $E(t)$  имеет вид

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}(t) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}^*(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (11)$$



Здесь  $\mathcal{E}(t)$  – комплексная амплитуда. Быстрая зависимость от времени на частоте  $\omega_0$  в (11) выделена. Поэтому амплитуда  $\mathcal{E}(t)$  меняется на характерном временном масштабе флуктуаций  $\tau_0$ . Типичное поведение модуля Фурье-образа  $\mathcal{E}_\omega$  амплитуды представлено на рис. 2. При выполнении неравенств

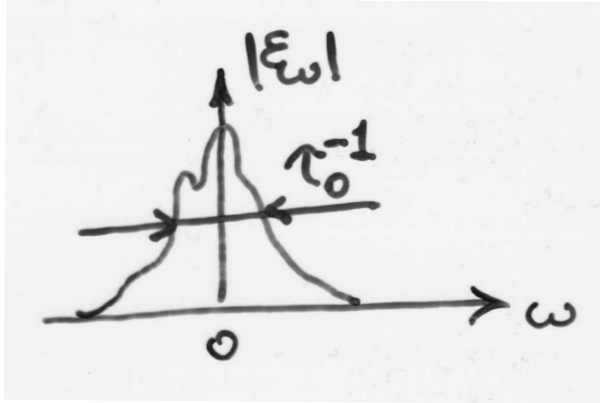


Рис. 2.

(3), (5) и (6) имеем из (4)

$$I(t) \simeq |\mathcal{E}(t)|^2. \quad (12)$$

Для Фурье-образа  $E_\omega$  нетрудно получить выражение

$$E_\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{E}_{\omega-\omega_0} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{E}_{-\omega-\omega_0})^*. \quad (13)$$

Вследствие (3) имеем приближённое равенство

$$|E_\omega| \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{E}_{\omega-\omega_0}| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{E}_{-\omega-\omega_0}|, \quad (14)$$

отражённое на рис. 3. Вблизи точки  $\omega = 0$  имеются только

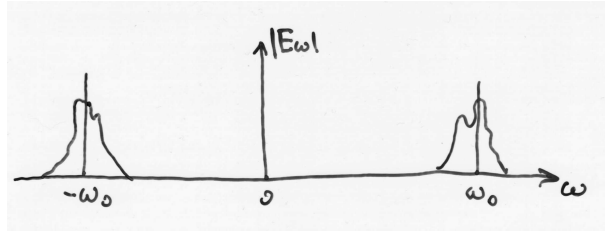


Рис. 3.

далёкие крылья структур, локализованных вблизи  $\omega_0$  и  $-\omega_0$ . Поэтому с хорошей точностью можно считать, что

$$E_{\omega}^{(+)} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_{\omega-\omega_0} \quad (15)$$

и, следовательно,

$$E^{(+)}(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (16)$$

Это практически очевидный с самого начала результат. Из (12), (10) и (16) имеем

$$I(t) \simeq E^{(+)}(t) E^{(-)}(t) = |E^{(+)}(t)|^2. \quad (17)$$

Таким образом, усреднение, осуществляемое прибором, можно учитывать простым взятием квадрата модуля аналитического сигнала. Он оказывается таким образом полезным уже в классической оптике, а в квантовой оптике важность понятия аналитического сигнала ещё более возрастает.

**Теорема Винера-Хинчина.** Вернёмся к идее ансамбля источников. Если они были включены когда-то давно, все переходные процессы завершились и процесс генерации излучения можно считать стационарным. В этом случае все

статистические средние не должны зависеть от выбора начала отсчёта времени. В частности, от этого выбора не должно зависеть среднее от напряжённости поля, и, поскольку постоянной составляющей в оптическом сигнале нет, можно считать

$$\langle E(t) \rangle = 0. \quad (18)$$

От начала отсчёта времени не должна зависеть также корреляционная функция оптического сигнала:

$$G(\tau) = \langle E(t + \tau)E(t) \rangle. \quad (19)$$

Результат усреднения в правой части этого выражения может (в стационарных условиях!) зависеть только от разности времён  $\tau$ . Относительно Фурье-образа корреляционной функции  $G(\tau)$  есть важные утверждения, составляющие содержание теоремы Винера-Хинчина. Используем Фурье-представление сигналов в (19):

$$G(\tau) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\omega_1} E_{\omega_2} \rangle e^{-i\omega_1(t+\tau) - i\omega_2 t} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2}. \quad (20)$$

Изменим знак у переменной интегрирования  $\omega_2$  и воспользуемся тем, что для Фурье-образа любого действительного сигнала имеет место равенство

$$E_{-\omega} = (E_{\omega})^*. \quad (21)$$

Это позволяет переписать (20) в виде

$$G(\tau) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t - i\omega_1 \tau} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2}. \quad (22)$$

Поскольку результат интегрирования не зависит от  $t$ , под интегралом должна появиться  $\delta$ -функция от разности частот:

$$\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle = 2\pi S(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (23)$$

Это равенство есть, фактически, определение функции  $S(\omega)$  – *спектральной плотности мощности*. С её помощью (22) принимает вид

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (24)$$

Формально имеет место также и обратное преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (25)$$

Что можно сказать о свойствах функций  $G(\tau)$  и  $S(\omega)$ ? Функция  $G(\tau)$  действительна и чётна<sup>2</sup> – два условия. Функция  $S(\omega)$ , как следует из (23), действительна, чётна и положительна<sup>3</sup> – три условия. Поэтому с точки зрения экспериментатора ценность выражений (24) и (25) различна. Если он имеет приближённые данные для функции  $S(\omega)$ , удовлетворяющие трём вышеупомянутым условиям, то (24) даст *разумную* (действительную и чётную) функцию  $G(\tau)$ . Если, напротив, экспериментатор захочет вычислит спектральную плотность мощности по приближённой корреляционной функции с помощью (25), нет гарантий, что в результате не получится  $S(\omega)$  с отрицательными значениями.

**Классическая модель фотоотсчётов. Процесс Пуассона.** Введённые выше понятия позволяют построить

---

<sup>2</sup>Последнее утверждение следует из (19) условия стационарности. Действительно,

$$G(-\tau) = \langle E(t - \tau)E(t) \rangle = \langle E(t')E(t' + \tau) \rangle = G(\tau)$$

, где  $t' = t - \tau$ .

<sup>3</sup>Положительность следует из простого наблюдения, что  $S(\omega_1)$  есть фактически вес при  $\delta$ -функции и возникает от статистического усреднения величины  $|E_{\omega_1}|^2 = E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* |_{\omega_1=\omega_2}$ .

простую, но во многих случаях адекватную модель генерации фототсчётов – последовательности хорошо локализованных во времени событий срабатывания детектора (например, ФЭУ), на который падает поток излучения  $I(t)$  (см. рис. 4). Интерес представляет вероятность  $p(n, t)$  получить  $n$

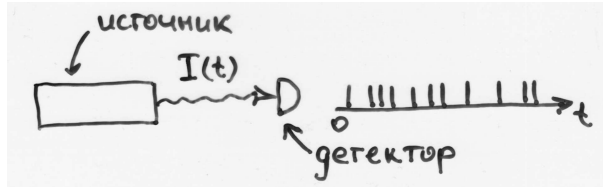


Рис. 4.

фототсчётов на интервале  $[0, t]$ . Руководящим послужит феноменологическое утверждение, что *вероятность получения фототсчёта в единицу времени пропорциональна (с некоторым коэффициентом  $\lambda$ ) интенсивности  $I(t)$* . Для вероятности  $p(n, t + dt)$  имеем:

$$p(n, t + dt) = p(n - 1, t)\lambda I(t)dt + p(n, t)(1 - \lambda I(t)dt). \quad (26)$$

Первое слагаемое в правой части есть произведение вероятности иметь  $n - 1$  фотоотсчёт к моменту  $t$  и получить ещё один на интервале  $[t, t + dt]$ . Второе слагаемое есть произведение вероятности уже иметь  $n$  фотоотсчётов к моменту  $t$  и не получить фотоотсчёта на интервале  $[t, t + dt]$ . Если  $dt$  достаточно малая величина, вероятность получить два и более фотоотсчётов интервале  $[t, t + dt]$  оказывается малой более высокого порядка, и дваслагаемых в правой части (26) отражают единственные сценарии получить  $n$  фототсчётов на интервале  $[0, t + dt]$ .

Переходя от (26) к дифференциальному уравнению, получаем

$$\frac{d}{dt}p(n, t) = \lambda I(t) \left( p(n-1, t) - p(n, t) \right). \quad (27)$$

Это бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для её решения воспользуемся приёмом, который будет применяться неоднократно. Введём так называемую производящую функцию

$$Q(s, t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} s^n p(n, t). \quad (28)$$

Пока будем считать для гарантирования сходимости, что модуль параметра  $s$  не превосходит 1. В дальнейшем будет ясно, что эта предосторожность излишняя. Поскольку

$$p(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad (29)$$

имеем

$$Q(s, 0) = 1 \quad (30)$$

– начальное условие для производящей функции. Умножая обе стороны (27) на  $s^n$  и суммируя  $n$ , получаем

$$\frac{d}{dt}Q(s, t) = \lambda I(t)(s-1)Q(s, t). \quad (31)$$

С учётом (30) решение имеет вид

$$Q(s, t) = \exp \left[ \lambda I(t)(s-1)U(t) \right]. \quad (32)$$

Здесь

$$U(t) = \int_0^t I(t') dt'$$

– величина энергии, попавшей на детектор за время наблюдения. Разлагая (32) в ряд Тейлора вблизи  $s = 0$  и используя определение (28), получаем

$$p(n, t) = \frac{(\lambda U_t)^n}{n!} \exp[-\lambda U_t], \quad (33)$$

Это распределение Пуассона. Оно даёт распределение вероятности для числа фотоотсчётов при заданной величине  $U_t$ . Если, однако, излучение стохастично, необходимо усреднить (33) по распределению вероятности иметь то или иное значение попавшей на детектор энергии:

$$\langle p(n, t) \rangle = \int_0^\infty \frac{(\lambda U_t)^n}{n!} \exp[-\lambda U_t] w[U_t] dU_t. \quad (34)$$

Это так называемая классическая формула Манделя.

Для среднего числа фотоотсчётов

$$\langle n \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n \langle p(n, t) \rangle \quad (35)$$

получаем из (34)

$$\langle n \rangle_t = \lambda \langle U_t \rangle \equiv \lambda \int_0^\infty U_t w[U_t] dU_t. \quad (36)$$

Для дисперсии

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle_t \doteq \langle (n - \langle n \rangle_t)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2, \quad (37)$$

вычисляя аналогичным образом  $\langle n^2 \rangle$ , получаем

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + \lambda^2 \langle (\Delta U_t)^2 \rangle, \quad (38)$$

где  $\langle(\Delta U_t)^2\rangle = \langle U_t^2\rangle - \langle U_t\rangle^2$  – дисперсия величины попавшей на детектор энергии. Заметим, что поскольку

$$\langle(\Delta U_t)^2\rangle = \int_0^\infty (U_t - \langle U_t\rangle)^2 w[U_t] dU_t \quad (39)$$

и распределение  $w[U_t]$  является обычным распределением вероятности и, естественно, всюду неотрицательно, интеграл (39) также неотрицателен. Поэтому имеет место неравенство

$$\langle(\Delta n)^2\rangle_t \geq \langle n\rangle_t, \quad (40)$$

следующее из (38). Статистика фотоотсчётов оказывается *суперпуассоновской* при любой стохастичности величины  $U_t$ . Это классический результат. Неравенство (40) может нарушаться в квантовой оптике, как будет показано в своё время.



## 2 Лекция 2

**Опыт Юнга.** Теперь мы рассматриваем оптический сигнал как поле  $E(\mathbf{r}, t)$  (пока скалярное) и будем интересоваться не только корреляциями между напряжённостью в разные моменты времени, как в случае теоремы Винера-Хинчина в прошлой лекции, но и корреляциями между значениями поля в разных точках пространства. Это уже позволит развить полноценную теорию когерентности.

Рассмотрим ставший уже классическим опыт Юнга – прохождение света через две щели (см. рис. 5). Излучение, по-

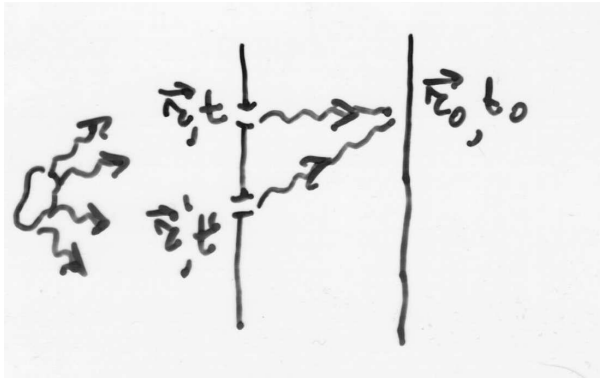


Рис. 5.

павшее в момент  $t_0$  в точку  $\mathbf{r}_0$  на экране наблюдения, прошло через щели в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в моменты  $t$  и  $t'$  соответственно, определяемые с учётом конечности скорости света:

$$t = t_0 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}, \quad t' = t_0 - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|}{c}. \quad (41)$$

Для электромагнитных волн выполняется принцип суперпозиции. Отвлекаясь от маловажных геометрических факторов, мы можем считать, что аналитический сигнал  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$

есть сумма сигналов от обеих щелей. Следовательно, для интенсивности на экране имеем:

$$I(\mathbf{r}_0, t_0) = |E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E^{(+)}(\mathbf{r}', t')|^2. \quad (42)$$

Усредняем эту интенсивность по всем возможным реализациям оптического поля в предположении стационарности:

$$\langle I(\mathbf{r}_0, t_0) \rangle \equiv I(\mathbf{r}_0) = I(\mathbf{r}) + I(\mathbf{r}') + 2\text{Re}\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t'). \quad (43)$$

Здесь введена новая функция

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \doteq \langle E^{(+)}(\mathbf{r}, t)E^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (44)$$

известная как функция взаимной когерентности 1-ого порядка (кратко – функция когерентности). Стационарность обусловила зависимость функции  $\Gamma$  только от разности времён  $t$  и  $t'$ . Заметим, что эта разность отражает взаимное пространственное расположение точек  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}_0$ :

$$t - t' = \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|}{c} - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}. \quad (45)$$

Отличие от нуля действительной части функции когерентности приводит, как видно из (43), к появлению интерференционной картины на экране наблюдения.

**Звёздная интерферометрия.** Обнаружение интерференции оптического излучения от далёких источников лежит в основе остроумного метода измерения диаметров звёзд. Идея этого метода состоит в следующем. Будем считать звезду раскалённым светящимся шаром. Элементарные излучатели на поверхности звезды имеют свои индивидуальные истории. События возбуждения и испускания у разных атомов в общем случае никак не скоррелированы. Поэтому, если

точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в выражении находятся на поверхности звезды, ненулевой результат усреднения может появиться только для близких точек. Расположим теперь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  дальше в пространстве. Несмотря на то, что  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ , обеих точек может достигнуть излучение, испущенное отдельным атомом на поверхности звезды. На рис. 6 атомы А и В облучают обе

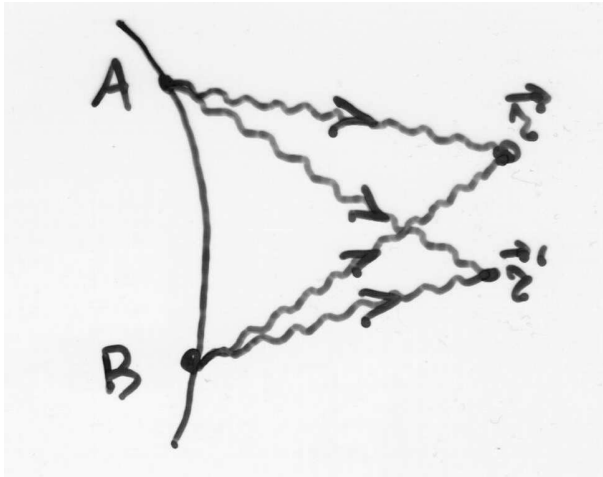


Рис. 6.

точки. Чем дальше в пространстве расположена пара  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , тем большее число атомов появляется из-за горизонта звезды и дают вклад в функцию когерентности. Это нетрудно увидеть в формальном выражении. Пронумеруем отдельные элементарные излучатели, тогда

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (46)$$

Здесь суммирование осуществляется по множеству  $\mathcal{I}$  элементарных излучателей, дающих вклад для данных  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Из

(44) и из условия нескоррелированности различных элементарных излучателей имеем

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{i' \in \mathcal{I}} \langle E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{i'}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \quad (47) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle.\end{aligned}$$

Именно последнее равенство вытекает из предположения нескоррелированности, т.к.

$$\langle E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{i'}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = 0 \quad (48)$$

при  $i \neq i'$ . Видно, что в результате функция когерентности есть сумма вкладов разных атомов.

Можно попытаться исследовать когерентность излучения далёкой звезды в земной лаборатории. Это делается в звёздном интерферометре Майкельсона. Утрированная схема изображена на рис. 7. Механика подвижных зеркал в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  позволяет менять расстояние между ними. Оптическая система телескопа позволяет фиксировать точку наблюдения на экране. Пусть при постепенном удалении зеркал найдено их первое положение, при котором освещённость точки наблюдения есть *сумма* освещённостей, обеспечиваемых зеркалами в  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ . Из этого мы можем заключить, что  $\text{Re}\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = 0$  (для простоты мы считаем оптические длины путей от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в точку наблюдения одинаковыми, поэтому полагаем  $t = t'$ ). Что это нам даёт? Следующая простая геометрическая схема на рис. 8 разъясняет ситуацию. Пусть атомы А и В находятся на противоположных концах диаметра звезды  $D$ . Расстояние до звезды  $L$ . Расстояния от атома (картина для атома В полностью симметрична) до зеркал

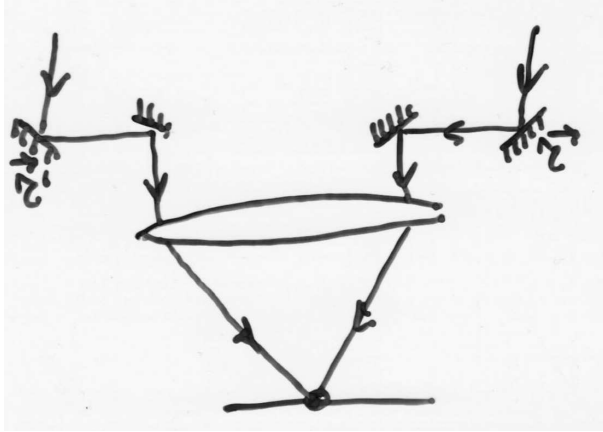


Рис. 7.

равны соответственно

$$\sqrt{L^2 + \frac{(D - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2}{4}}, \quad \sqrt{L^2 + \frac{(D + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2}{4}}.$$

Когда разность этих расстояний окажется равной четверти длины волны  $\lambda$ , на которой ведётся наблюдение, действительная часть величины  $\langle E_A^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_A^{(-)}(\mathbf{r}', t) \rangle$  обратится в нуль. Это и есть положение, которое целесообразно искать в звёздном интерферометре. Т.к.  $L \gg D, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , связь четырёх длин выражается простой формулой

$$D \sim \frac{L\lambda}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (49)$$

Для звезды  $\alpha$ -Центавра, наблюдаемой в узком диапазоне длин волн вблизи  $10^{-5} \text{ cm}$ , имеем  $L \sim 10^{18} \text{ cm}$  и  $D \sim 10^{11} \text{ cm}$ , чему соответствует расстояние между зеркалами порядка нескольких метров.

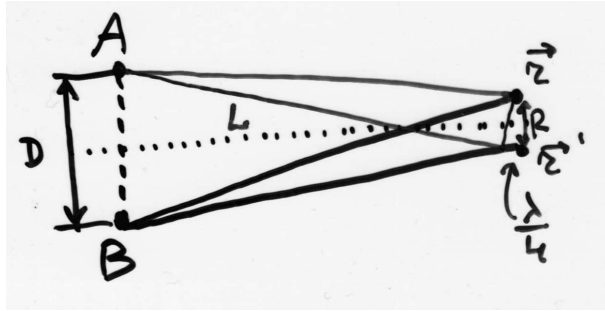


Рис. 8.

Трудности работы со звёздным интерферометром Майкельсона, превращающие её почти в искусство, вызваны крайней уязвимостью высокочастотных "информационных" каналов по которым распространяется излучение от подвижных зеркал к точке наблюдения. Действительно, если один из каналов подвергается воздействию некоторого фактора, случайно и быстро (в масштабе длительности эксперимента) меняющего его оптическую длину на величину, сравнимую с  $\lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$ , может появиться "ложный ноль" функции когерентности. Естественно, что при распространении излучения в турбулентностях атмосферы также имеет место изменение длины пути, но опасность представляет именно внутренность интерферометра, где излучение распространяется уже по двум различным путям.

**Схема Брауна-Твисса. "Интерференция интенсивностей"**. Решение указанной выше проблемы должно заключаться в избавлении от высокочастотного канала передачи информации. Если вместо оптического периода  $\omega_0^{-1}$  характерным масштабом сигнала окажется время флуктуации  $\tau_0$ , канал станет значительно менее уязвимым. Эта идея реализована в схеме Брауна-Твисса. Вместо зеркал в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$

следует расположить приёмники излучения (см. рис. 9). Их

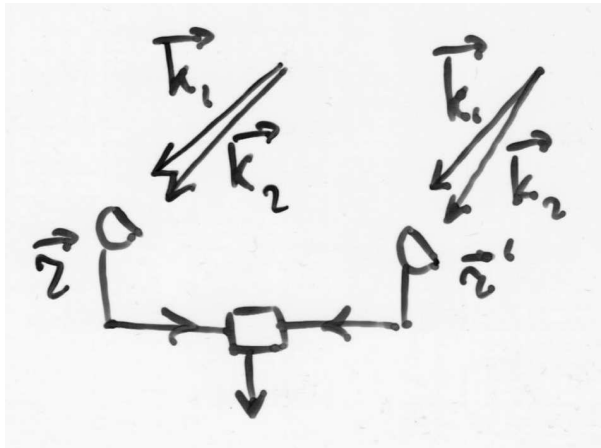


Рис. 9.

сигналы (измеряемые интенсивности) следует переслать на умножитель и произвести усреднение по большому периоду времени, имитируя таким образом (в стационарных условиях!) статистическое усреднение.

Пусть на систему падают два плоских световых фронта с очень близкими волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  от двух независимых источников:

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \left( \mathcal{E}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} + \mathcal{E}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_0 t} \quad (50)$$

и

$$E^{(+)}(\mathbf{r}', t) = \left( \mathcal{E}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}'} + \mathcal{E}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}'} \right) e^{-i\omega_0 t} \quad (51)$$

Здесь комплексные амплитуды  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  несут зависимость от времени на масштабе  $\tau_0$ . После перемножения интенсивностей и последующего усреднения получаем

$$\langle |E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 |E^{(+)}(\mathbf{r}', t)|^2 \rangle =$$

$$= \langle (|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2)^2 \rangle + 2\langle |\mathcal{E}_1|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}_2|^2 \rangle \cos(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (52)$$

При вычислении средних в этом выражении были отброшены величины, содержащие произведения комплексных амплитуд с нескомпенсированными фазами типа  $\langle \mathcal{E}_i \rangle$ ,  $\langle \mathcal{E}_i^2 \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}_i |\mathcal{E}_i^2|^2 \rangle$ . Они обязательно обратятся в ноль при статистическом усреднении. Изменение расстояния между детекторами позволяет осуществить, как видно из (52), угловое разрешение двух близких источников, например, двойной звезды.

Этот метод называют иногда "интерференцией интенсивностей" что является крайне неудачным термином. Интенсивности – действительные и положительные величины – никогда не могут интерферировать. Более того, в методе Брауна-Твисса они даже не складываются, а перемножаются. Тем не менее, появление осциллирующего слагаемого в свидетельствует, что какой-то интерференционный процесс всё же имеет место. Разберёмся в этом вопросе. Будем нумеровать различные источники греческими буквами, а четвёрки  $\mathbf{r}, t$  и  $\mathbf{r}', t$  – символами  $x$  и  $x'$ :

$$E^{(+)}(x) = \sum_{\alpha} E_{\alpha}^{(+)}(x). \quad (53)$$

Тогда

$$\langle |E^{(+)}(x)|^2 |E^{(+)}(x')|^2 \rangle = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \sum_{\beta_1, \beta_2} \langle E_{\alpha_1}^{(+)}(x) E_{\alpha_2}^{(-)}(x) E_{\beta_1}^{(+)}(x') E_{\beta_2}^{(-)}(x') \rangle \quad (54)$$

При проведении усреднения в последнем выражении надо помнить о нескоррелированности разных источников и о занулении выражений с нескомпенсированными фазами. В итоге получаем:

$$\langle |E^{(+)}(x)|^2 |E^{(+)}(x')|^2 \rangle =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha} \langle |E_{\alpha}^{(+)}(x)|^2 |E_{\alpha}^{(+)}(x')|^2 \rangle + \sum_{\alpha \neq \beta} \langle |E_{\alpha}^{(+)}(x)|^2 |E_{\beta}^{(+)}(x')|^2 \rangle + \quad (55) \\
&\quad + \sum_{\alpha \neq \beta} \langle E_{\alpha}^{(+)}(x) E_{\alpha}^{(-)}(x') \rangle \langle E_{\beta}^{(+)}(x') E_{\beta}^{(-)}(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Чтобы лучше понять, где в этом выражении содержится интерференция, целесообразно рассмотреть случай всего двух источников. Тогда правая часть (55) примет вид

$$\begin{aligned}
&\langle |E_1^{(+)}(x)|^2 |E_1^{(+)}(x')|^2 \rangle + \langle |E_2^{(+)}(x)|^2 |E_2^{(+)}(x')|^2 \rangle + \quad (56) \\
&\quad + \langle |E_1^{(+)}(x)|^2 |E_2^{(+)}(x')|^2 \rangle + \langle |E_2^{(+)}(x)|^2 |E_1^{(+)}(x')|^2 \rangle + \\
&\quad + \left( \langle E_1^{(+)}(x) E_1^{(-)}(x') \rangle \langle E_2^{(+)}(x) E_2^{(-)}(x') \rangle + c.c. \right).
\end{aligned}$$

Последние четыре слагаемых можно объединить. Это приведёт нас к выражению

$$\begin{aligned}
&\langle |E^{(+)}(x)|^2 |E^{(+)}(x')|^2 \rangle = \\
&= \langle |E_1^{(+)}(x)|^2 |E_1^{(+)}(x')|^2 \rangle + \langle |E_2^{(+)}(x)|^2 |E_2^{(+)}(x')|^2 \rangle + \quad (57) \\
&\quad + \langle |E_1^{(+)}(x) E_2^{(+)}(x') + E_1^{(+)}(x') E_2^{(+)}(x)|^2 \rangle.
\end{aligned}$$

Физический смысл слагаемых в правой части достаточно прозрачен. Первое слагаемое отражает ситуацию, когда оба детектора освещены излучением из первого источника (см. рис. 10). Аналогично, второе слагаемое отвечает случаю ответственности источника 2 за освещение обоих детекторов (см. рис. 11). Третье слагаемое есть усреднённый квадрат модуля суммы комплексных величин. Первый член суммы явно описывает попадание излучения от первого источника в детектор  $x$ , а от второго – в детектор  $x'$  (см. рис. 12). Второй член отвечает перестановке источников (см. рис. 13).

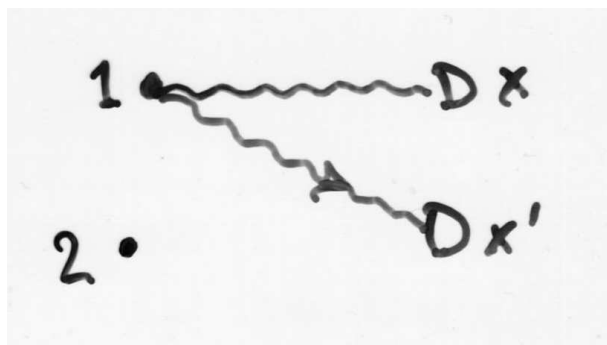


Рис. 10.

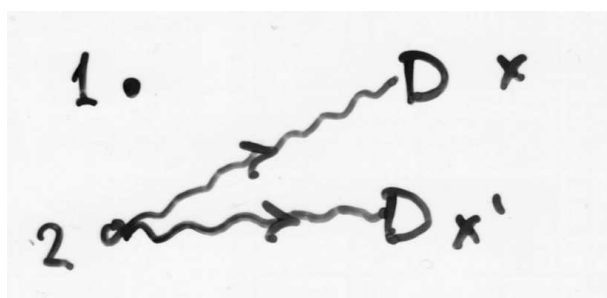
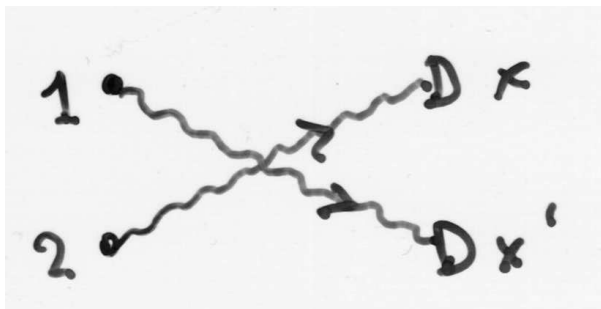
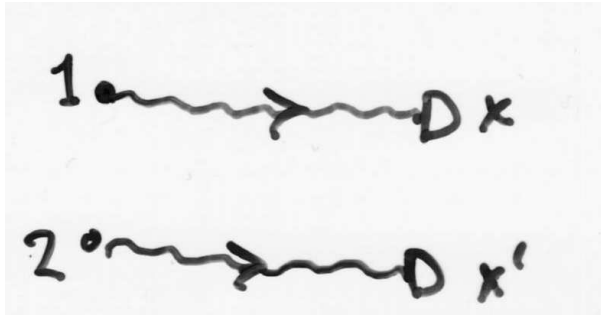


Рис. 11.

Члены в последней сумме представляют собой произведения комплексных амплитуд процессов попадания излучения из определённого источника в определённый детектор. Их произведения естественно трактовать как амплитуды составных процессов. В квантовой оптике, к которой мы переходим в следующей лекции, эти амплитуды тесно связаны с амплитудами вероятности соответствующих составных процессов. Процессы с рисунков 12 и 13 интерферируют, как видно из (57) – их амплитуды складываются аналогичным образом, как складываются амплитуды в более простом случае при



анализе опыта Юнга в (42). Естественен вопрос: почему в такой обобщённой интерференции не участвуют процессы с рис. 10 и 11? Опять полезно вспомнить элементарную квантовую физику и, забегая вперёд, ввести понятие фотона – кванта оптического излучения. Известно, что если в опыте Юнга обеспечить возникновение информации о щели, через которую прошёл свет (фотон), вызвавший засветку на экране, интерференционная картина исчезнет. Процессы с рис. 10 и 11 как раз отвечают наличию в природе информации, позволяющей указать на один из них как на реально произо-

шедший. Проще всего проиллюстрировать это, считая, что источники являются стрелками, у каждого из которых имеется изначально по два патрона, а детекторы – мишенями. Если обе мишени поразил первый стрелок, а второй вообще не участвовал, его боезапас останется нетронутым, и последующая проверка это всегда обнаружит. Аналогична ситуация в случае, если стрельба велась как на рис. 11. Обе эти ситуации однозначно идентифицируются последующей проверкой. Но если оказались поражены обе мишени и каждый из стрелков израсходовал один патрон, мы не сможем указать по какому из сценариев (рис. 12 или рис. 13) развивалась ситуация. Поэтому эти сценарии интерферируют. Хотелось бы подчеркнуть, что интерферировать могут сценарии или, точнее, процессы эволюции, стартовавшие из некоторого единого начального состояния и завершившиеся в некотором едином конечном состоянии. Интерферируют не частицы и не фотоны! В этом контексте не стоит апеллировать к часто цитируемому туманному высказыванию Дирака о том, что "... каждый фотон интерферирует лишь сам с собой. Интерференции между двумя разными фотонами никогда не происходит."

### 3 Лекция 3

**Квантованное поле.** Мы переходим собственно к квантовой оптике. Напряжённость классического поля  $E(\mathbf{r}, t)$  – действительная функция точки в пространстве-времени – должна превратиться в самосопряжённый оператор. Некоторые детали процедуры квантования поля, излагаемой во многих учебниках, целесообразно напомнить. Рассмотрим некоторую пространственную область, в которой мы собираемся проквантовать поле. Это может быть резонатор лазера (и тогда эта область и условия на её границе однозначно задаются рассматриваемой задачей) или это может быть чисто воображаемая область с достаточно большими размерами, что позволяет рассматривать квантованное поле в некоторой внутренней меньшей области, не заботясь о деталях граничных условий для большой области. Обычно эти граничные условия выбирают самым простым образом – область считается кубом, всё пространство заполнено такими кубами, и поле периодически. Решим для такой периодической конфигурации поля свободные уравнения Максвелла. Интересуемся решениями с гармонической зависимостью от времени и простой пространственной структурой плоских волн. Это так называемые моды поля – комплексные функции координат и времени, которые удобно нормировать на единицу при интегрировании квадрата их модуля по объёму квантования  $V$ :

$$u_i(\mathbf{r})e^{-i\omega_i t}, \quad (58)$$

где

$$u_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}}. \quad (59)$$

Здесь волновой вектор пробегает дискретное множество значений, обеспечивая периодичность поля. Выражение гаран-

тирует не только нормировку, но и ортогональность различных мод:

$$\int_V u_i(\mathbf{r})u_{i'}^*(\mathbf{r})d^3r = \delta_{i,i'}. \quad (60)$$

Моды (59) с условием (60) составляют полный набор, который удобно использовать для разложения произвольного (пока классического) поля с той же периодичностью:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_i \sqrt{2\pi\hbar\omega_i} \left( \alpha_i u_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_i t} + \alpha_i^* u_i^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_i t} \right). \quad (61)$$

Здесь  $\alpha_i$  – комплексная амплитуда моды с номером  $i$ . Форма коэффициента перед круглыми скобками выбрана из соображений дальнейшего удобства.

Переход от классического поля  $E(\mathbf{r}, t)$  к квантовой наблюдаемой – самосопряжённому оператору  $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$  – предполагает переход к операторной природе в правой части (61). В операторы должны превратиться амплитуды мод, как естественные представители индивидуальности поля:

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \sqrt{2\pi\hbar\omega_i} \left( \hat{a}_i u_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_i t} + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_i t} \right). \quad (62)$$

Необходимо определить коммутационные свойства операторов  $\hat{a}_i$  и  $\hat{a}_i^\dagger$ . Заметим, что оператор (62) зависит от времени. Следовательно, это оператор в гейзенберговском представлении:

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar) \hat{E}(\mathbf{r}, 0) \exp(-i\hat{H}t/\hbar), \quad (63)$$

где  $\hat{H}$  – гамильтониан квантованного электромагнитного поля. Поле мы считаем свободным, т.е. не контактирующим ни с источниками, ни с детекторами. Поэтому его гамильтониан

можно получить из классической формулы для энергии поля в объёме  $V$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) d^3r. \quad (64)$$

Произведя интегрирование с учётом условия ортонормированности мод (60), получаем

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_i \hbar \omega_i \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \right). \quad (65)$$

Из выражения (63) имеем структуру  $\hat{a}_i$  и  $\hat{a}_i^\dagger$  в гейзенберговском представлении:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \exp(-i\omega_i t) &= \exp(i\hat{H}t/\hbar) \hat{a}_i \exp(-i\hat{H}t/\hbar), \\ \hat{a}_i^\dagger \exp(i\omega_i t) &= \exp(i\hat{H}t/\hbar) \hat{a}_i^\dagger \exp(-i\hat{H}t/\hbar). \end{aligned} \quad (66)$$

Дифференцируя первое из этих эквивалентных равенств по  $t$  в точке  $t = 0$ , получаем

$$\omega_i \hat{a}_i = -\frac{1}{2} \sum_j \omega_j [\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_i]. \quad (67)$$

Естественно считать, что операторы, относящиеся к разным модам коммутируют, т.к. они произошли от независимых амплитуд. Тогда вместо (67) имеем

$$\frac{1}{2} [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i] = -\hat{a}_i. \quad (68)$$

Простейший вариант коммутационных соотношений, удовлетворяющих равенству (68), известен как каноническое квантование электромагнитного поля:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]. \quad (69)$$

Гамильтониан (65) принимает в этом случае вид

$$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right). \quad (70)$$

и поле предстаёт как совокупность гармонических осцилляторов, сопоставляемых каждой гармонической полевой моде. Собственные состояния гамильтониана нумеруются набором целых чисел  $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ :

$$|\{n_i\}\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (71)$$

так, что

$$\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j |\{n_i\}\rangle = n_j |\{n_i\}\rangle \quad (72)$$

Эти состояния известны как состояния Фока. Число  $n_i$  трактуется как число квантов возбуждения, фотонов, в моде  $i$ . Операторы  $\hat{a}_i$  ( $\hat{a}_i^\dagger$ ) действуют как операторы уничтожения (рождения) фотона в соответствующей моде:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle; \\ \hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (73)$$

Эти соотношения следуют из теории квантового гармонического осциллятора.

Поскольку частоты всех мод по определению положительны, замечаем, что сумма первых слагаемых из круглых скобок (61) и, в квантовом случае (62), соответствует положительночастотному аналитическому сигналу:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \sqrt{2\pi\hbar\omega_i} \hat{a}_i u_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_i t}. \quad (74)$$

Соответственно

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \sqrt{2\pi\hbar\omega_i} \hat{a}_i^\dagger u_i^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_i t}. \quad (75)$$



Таким образом, положительночастотному аналитическому сигналу сопоставляется в квантовой оптике часть оператора напряжённости поля, уничтожающая фотоны. Часть, рождающая фотоны, соответствует отрицательночастотному аналитическому сигналу.

#### Глауберовская теория детектирования фотонов.

Первым и очень важным применением понятия квантованного поля является модель детектирования его квантов (R. Glauber). Из этой модели родилась вся квантовая оптика.

Детекторами в модели Глаубера служат системы атомов. Поскольку целью является построение теории генерации фотоотсчётов, т.е. хорошо локализованных во времени событий, вопрос о частоте зарегистрированных фотонов не возникает. Атомы-детекторы должны быть лишены всякой способности к спектральной селекции излучения. Это значит, что структура их энергетических уровней должна быть как можно более густой и в пределе – континуальной (см. рис. 14). Континуальность отвечает энергетическому спектру свобод-

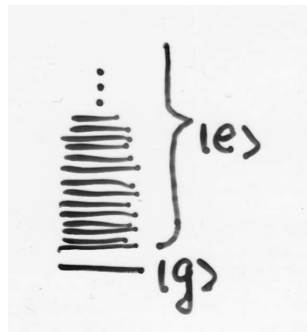


Рис. 14.

ного электрона, выбитого из атома при поглощении кванта.

Рассмотрим детектор, состоящий из пары атомов, Этот

пример позволит понять общую ситуацию с произвольным числом атомов. Предположим, что положения  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  атомов в пространстве фиксированы и каждый из атомов вступает во взаимодействие с излучением на интервалах времени  $[0, t_1]$  и  $[0, t_2]$ , а потом некоторая воображаемая "заслонка" выключает это взаимодействие. Нам предстоит вычислить вероятность регистрации фотонов каждым из атомов.

Гамильтониан системы "атомы + поле" содержит собственный гамильтониан атомов  $\hat{H}_{at}$ , собственный гамильтониан поля  $\hat{H}_{ph}$  и гамильтониан их взаимодействия  $\hat{V}$ :

$$\hat{H}_{at+ph} = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{ph} + \hat{V}. \quad (76)$$

Этот гамильтониан задаёт эволюцию вектора состояния  $|\tilde{\Psi}_t\rangle$  системы:

$$\frac{d}{dt}|\tilde{\Psi}_t\rangle = -i\hat{H}_{at+ph}|\tilde{\Psi}_t\rangle. \quad (77)$$

Здесь и далее постоянная Планка принимается за единицу. Начальное состояние системы "атомы + поле" отвечает нахождению атомов на основных уровнях и поля в некотором начальном состоянии  $|in\rangle$ :

$$|\tilde{\Psi}_0\rangle = |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle \otimes |in\rangle. \quad (78)$$

Решение уравнения (77) описывает как собственную динамику атомов и поля, так и динамику их взаимодействия. Для нас интересна именно последняя. От собственной динамики атомов и поля можно избавиться стандартным приёмом перехода в так называемое представление взаимодействия, известное также как представление Дирака:

$$|\Psi_t\rangle = \exp[i(\hat{H}_{at} + \hat{H}_{ph})t]|\tilde{\Psi}_t\rangle. \quad (79)$$

Заметим, что представление взаимодействия есть ни что иное как частичное гейзенберговское представление относительно

собственного гамильтониана. Для состояния в новом представлении уравнение модифицируется:

$$\frac{d}{dt}|\Psi_t\rangle = -i\hat{V}(t)|\Psi_t\rangle, \quad (80)$$

где

$$\hat{V}(t) = \exp[i(\hat{H}_{at} + \hat{H}_{ph})t]\hat{V}\exp[-i(\hat{H}_{at} + \hat{H}_{ph})t]. \quad (81)$$

Взаимодействие атомов и излучения мы будем описывать в простейшем, дипольном, приближении:

$$\hat{V}(t) = -\Theta(t_1 - t)\hat{D}_1\hat{E}(\mathbf{r}_1, t) - \Theta(t_2 - t)\hat{D}_2\hat{E}(\mathbf{r}_2, t). \quad (82)$$

Здесь

$$\hat{D}_k(t) = \exp[i\hat{H}_{at}t]\hat{D}_k\exp[-i\hat{H}_{at}t]. \quad (83)$$

– оператор дипольного момента атома  $k$  (в представлении взаимодействия), а  $\hat{E}(\mathbf{r}_k, t)$  – оператор напряжённости поля (62). Функции Хэвисайда  $\Theta(x)$  ( $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $\Theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ ) моделируют упомянутое "выключение" взаимодействия атомов и поля.

Модель (77) слишком сложна для получения точного решения. Воспользуемся поэтому теорией возмущений, считая  $\hat{V}(t)$  достаточно слабым. От дифференциального уравнения (80) перейдём к интегральному:

$$|\Psi_t\rangle = |\Psi_0\rangle - \int_0^t dt' \hat{V}(t')|\Psi_{t'}\rangle. \quad (84)$$

Здесь  $|\Psi_0\rangle = |\tilde{\Psi}_0\rangle$  согласно (79). Можно продвинуться ещё на один шаг, подставив  $|\Psi_{t'}\rangle$  в виде (84) в подынтегральное выражение:

$$|\Psi_t\rangle = |\Psi_0\rangle - \int_0^t dt' \hat{V}(t')|\tilde{\Psi}_0\rangle - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{V}(t')\hat{V}(t'')|\Psi_{t''}\rangle. \quad (85)$$

На этом этапе уже можно действовать по теории возмущений и заменить  $|\Psi_{t''}\rangle$  под интегралом на  $|\Psi_0\rangle$ :

$$|\Psi_t\rangle \simeq \left( 1 - \int_0^t dt' \hat{V}(t') - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{V}(t') \hat{V}(t'') \right) |\Psi_0\rangle. \quad (86)$$

Первое слагаемое (единичный оператор) в круглых скобках отвечает полному отсутствию взаимодействия атомов и поля. Второе слагаемое содержит первую степень гамильтониана взаимодействия (82). Он может изменить состояние только одного атома! Регистрацию двух фотонов парой атомов в наинизшем порядке теории возмущений описывается последним слагаемым в круглых скобках в (86).

Обратим внимание на структуру интегрирования в этом слагаемом. Она обеспечивает, как легко заметить, упорядоченность  $t' \geq t''$  аргументов в операторных сомножителях  $\hat{V}(t')$  и  $\hat{V}(t'')$ . В общем эти операторы при разных значениях аргументов не коммутируют. Чтобы  $t'$  и  $t''$  вошли в выражение симметричным образом, мы введём символ временного упорядочения:  $T\hat{V}(t')\hat{V}(t'')$ . Он расставляет операторные сомножители так, что более поздний момент времени оказывается у левого сомножителя. После этого нужный нам фрагмент состояния можно записать в виде

$$-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' T\hat{V}(t')\hat{V}(t'') |\Psi_0\rangle. \quad (87)$$

В рассматриваемом наинизшем порядке теории возмущений каждый атом однократно возбуждается из основного состояния в континуум (испускает фотоэлектрон). При этом меняется состояние поля. Оператор  $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$ , ответственный за это изменение, может родить или уничтожить один фотон. Результат для двух атомов включает возможность появле-

ния или исчезновения до двух фотонов. В принципе присутствуют все варианты. Нас не должно смущать кажущееся нарушение закона сохранения энергии, т.к. это нарушение касается не всего гамильтониана (76), а только суммы первых двух слагаемых. Однако, главный вклад в процесс регистрации вносят именно слагаемые, описывающие уничтожение фотонов (так называемое резонансное приближение). В этом приближении мы можем вместо операторов  $\hat{E}(\mathbf{r}_k, t)$  оставить только  $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_k, t)$ . Это сразу упрощает ситуацию и делает излишним заботу о временной упорядоченности. Действительно, операторы дипольных моментов разных атомов коммутируют, как и  $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_k, t)$ , содержащие только операторы уничтожения фотонов. В результате (87) принимает вид<sup>4</sup>

$$- \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \hat{D}_1(t') |g_1\rangle \otimes \hat{D}_2(t'') |g_2\rangle \otimes \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t'') |in\rangle. \quad (88)$$

Это выражение позволяет легко определить амплитуду вероятности перехода

$$|g_1\rangle \otimes |g_2\rangle \otimes |in\rangle \rightarrow |e_1\rangle \otimes |e_2\rangle \otimes |fin\rangle,$$

где  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$  – некоторые возбуждённые состояния атомов, а  $|fin\rangle$  – некоторое конечное состояние поля:

$$A_{(g_1, g_2, in) \rightarrow (e_1, e_2, fin)} = - \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle e_1 | \hat{D}_1(t') | g_1 \rangle \langle e_2 | \hat{D}_2(t'') | g_2 \rangle \times \times \langle fin | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t'') | in \rangle. \quad (89)$$

Нас интересует вероятность возбуждения обоих атомов без конкретизации конечных состояний. Поэтому по  $e_1$ ,  $e_2$  и  $fin$

---

<sup>4</sup>Мы считаем, что  $t > t_1, t_2$

должно производиться суммирование. Здесь уместно задать вопрос: должны ли мы сначала просуммировать амплитуды (89) и потом перейти к вероятности или сначала перейти от амплитуд (89) к соответствующим вероятностям и суммировать уже их? Суммируя амплитуды, мы тем самым предполагаем интерференцию соответствующих сценариев. Но такой интерференции быть не может, т.к. в природе имеется информация о пути, по которому эволюционировала система. Действительно, мы можем, например, провести эксперимент по измерению параметров вылетевших из атомов фотоэлектронов. Таким образом, вычисляя вероятность возбуждения  $p_{in}(t_1, t_2)$  атомов, мы должны суммировать вероятности:

$$p_{in}(t_1, t_2) = \sum_{e_1} \sum_{e_2} \sum_{fin} |A_{(g_1, g_2, in) \rightarrow (e_1, e_2, fin)}|^2. \quad (90)$$

Выполнив это суммирование, мы придём к выражению

$$p_{in}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_1} d\tau' \int_0^{t_2} dt'' \int_0^{t_2} d\tau'' R_1(t' - \tau') R_2(t'' - \tau'') \times \langle in | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, \tau'') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, \tau') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t'') | in \rangle. \quad (91)$$

Здесь

$$R_k(t - \tau) = \sum_{e_k} \exp[i\omega_{e_k g_k}(t - \tau)] |\langle e_k | \hat{D}_k | g_k \rangle|^2. \quad (92)$$

где  $\omega_{e_k g_k}$  – разность соответствующих уровней в атоме с номером  $k$ . Суммирование по конечным состояниям поля включает все его возможные состояния. Свойство полноты

$$\sum_{fin} |fin\rangle \langle fin| = 1. \quad (93)$$

позволяет провести это суммирование без всяких проблем.

Упомянутая ранее структура уровней атомов делает правую часть (92) суммой многих комплексных чисел. Если их модули  $|\langle e_k | \hat{D}_k | g_k \rangle|^2$  слабо зависят от  $e_k$ , получающаяся сумма будет быстро убывать при удалении  $t$  от  $\tau$ . Физический уровень строгости позволяет полагать

$$R_k(t - \tau) \simeq R_k \delta(t - \tau). \quad (94)$$

где  $R_k$  – некоторый множитель.

Дифференцируя  $p_{in}(t_1, t_2)$  по  $t_1$  и  $t_2$ , мы получаем плотность вероятности  $w_{in}(t_1, t_2)$  появления фотоотсчётов в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{aligned} w_{in}(t_1, t_2) &\doteq \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} p_{in}(t_1, t_2) = \\ &= R_1 R_2 \langle in | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) | in \rangle. \end{aligned} \quad (95)$$

Эта плотность вероятности зависит от начального состояния поля  $|in\rangle$ . В реальной жизни начальное состояние практически никогда не известно точно. Мы располагаем лишь вероятностями  $\rho_{in}$  приготовления именно состояния  $|in\rangle$ . Поэтому необходимо усреднить по распределению вероятности  $\{\rho_{in}\}$ :

$$w(t_1, t_2) = \sum_{in} \rho_{in} w_{in}(t_1, t_2). \quad (96)$$

Введём важное понятие – статистический оператор поля (иногда его называют матрицей плотности поля):

$$\hat{\varrho} = \sum_{in} \rho_{in} |in\rangle \langle in|. \quad (97)$$

Использование статистического оператора позволяет нам записать выражение для плотности вероятности в окончательной форме:

$$w(t_1, t_2) = \tag{98}$$

$$R_1 R_2 \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \right).$$

След в этом выражении берётся по любому базису состояний квантованного поля.



## 4 Лекция 4

### Квантовая функция когерентности $n$ -ого порядка.

Обобщая выражение (98), полученное в предыдущей лекции, можно заключить, что плотность вероятности зарегистрировать фотоны в пространственно-временных точках  $(\mathbf{r}_1, t_1), \dots, (\mathbf{r}_n, t_n)$  с помощью  $n$ -атомного детектора квантов даётся выражением

$$w(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n) = R_1 \dots R_n \times \\ \times \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \dots \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \right). \quad (99)$$

Для краткости будем, как и во второй лекции, использовать букву  $x$  вместо четырёх координат события регистрации фотона. Главным фактором в (99) является след произведения статистического оператора поля и операторов напряжённости. Также для краткости обозначим след в произведении с угловыми скобками:

$$\langle \dots \rangle \doteq \text{Tr} \left( \hat{\rho} \dots \right). \quad (100)$$

Это есть квантовый вариант статистического усреднения.

В случае одноатомного детектора в схеме Юнга фигурируют величины  $\langle \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) \rangle$ ,  $\langle \hat{E}^{(-)}(x') \hat{E}^{(+)}(x') \rangle$  и  $\langle \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x') \rangle$ . Появление последнего недиагонального по координатам выражения (квантовой функции когерентности 1-ого порядка) мотивирует введение квантовых функций когерентности  $n$ -ого порядка:

$$\Gamma^{(n)}(x_n, \dots, x_1; x'_1, \dots, x'_n) = \\ = \langle \hat{E}^{(-)}(x_n) \dots \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x'_1) \dots \hat{E}^{(+)}(x'_n) \rangle. \quad (101)$$

Полезными оказываются также нормированные функции когерентности  $n$ -ого порядка:

$$\gamma^{(n)}(x_n, \dots, x_1; x'_1, \dots, x'_n) = \frac{\Gamma^{(n)}(x_n, \dots, x_1; x'_1, \dots, x'_n)}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\Gamma^{(1)}(x_i, x_i) \Gamma^{(1)}(x'_i, x'_i)}}. \quad (102)$$

**Когерентность 1-ого порядка.** Наиболее богата содержательными утверждениями теория квантовой когерентности 1-ого порядка. Рассмотрим соответствующую нормированную функцию когерентности:

$$\gamma^{(1)}(x_1; x_2) = \frac{\Gamma^{(1)}(x_1; x_2)}{\sqrt{\Gamma^{(1)}(x_1, x_1) \Gamma^{(1)}(x_2, x_2)}}. \quad (103)$$

Для анализа её свойств введём оператор

$$\hat{A} \doteq \sum_{i=1,2} z_i \hat{E}^{(+)}(x_i), \quad (104)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – произвольные комплексные числа. Для любого оператора, в том числе и для оператора  $\hat{A}$  из (104), имеет место неравенство

$$\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle \geq 0. \quad (105)$$

Перепишем его в виде

$$\sum_{i,j=1,2} z_i^* z_j \Gamma^{(1)}(x_i; x_j) \geq 0. \quad (106)$$

Это есть утверждение о неотрицательности квадратичной формы с коэффициентами  $\Gamma^{(1)}(x_i; x_j)$ . Форма эрмитова, поскольку  $\Gamma^{(1)}(x_i; x_j)^* = \Gamma^{(1)}(x_j; x_i)$ . Необходимым условием неотрицательности формы является неотрицательность

определителя матрицы её коэффициентов<sup>5</sup>:

$$|\Gamma^{(1)}(x_1; x_2)|^2 \leq \Gamma^{(1)}(x_1; x_1)\Gamma^{(1)}(x_2; x_2). \quad (107)$$

откуда следует, что всегда

$$|\gamma^{(1)}(x_1; x_2)| \leq 1. \quad (108)$$

Обратимся теперь к разложениям (74) и (75) операторов  $\hat{E}^{(+)}(x)$  и  $\hat{E}^{(-)}(x)$  по гармоническим полевым модам. Это позволяет ввести следующее выражение для функции когерентности 1-ого порядка:

$$\Gamma^{(1)}(x_1; x_2) = 2\pi \sum_{\alpha, \alpha'} \sqrt{\omega_\alpha \omega_{\alpha'}} u_\alpha^*(\mathbf{r}_1) u_{\alpha'}(\mathbf{r}_2) \exp[i(\omega_\alpha t_1 - \omega_{\alpha'} t_2)] \Gamma_{\alpha\alpha'}. \quad (109)$$

Здесь номер моды обозначен греческой буквой и

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} \doteq \langle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_{\alpha'} \rangle. \quad (110)$$

Числа  $\Gamma_{\alpha\alpha'}$  образуют в общем случае бесконечную "квадратную" эрмитову матрицу. В действительности всегда можно считать, что возбуждено только конечное число мод. Поэтому тонкости операций с бесконечными матрицами не должны нас беспокоить.

Будем считать, что для матрицы решена задача вычисления собственных векторов и собственных значений:

$$\sum_{\alpha'} \Gamma_{\alpha\alpha'} b_{k\alpha'} = \lambda_k b_{k\alpha}. \quad (111)$$

Здесь  $k$  нумерует решения этой задачи. Нас не должна волновать также перспектива столкнуться с вырождением собственных значений, поскольку такое вырождение всегда есть

---

<sup>5</sup>Нетрудно заметить, что следующее выражение есть некоторая форма известного неравенства Коши.

следствие некоторой физической симметрии, для наличия которой в данном случае нет никаких оснований. Известно, что для набора собственных векторов можно обеспечить ортонормированность

$$\sum_{\alpha} b_{k\alpha}^* b_{k\alpha} = \delta_{kk'} \quad (112)$$

и полноту

$$\sum_k b_{k\alpha} b_{k\alpha'}^* = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (113)$$

Введём новые операторы :

$$\hat{b}_k \doteq \sum_{\alpha} b_{k\alpha} \hat{a}_{\alpha} \quad (114)$$

и их сопряжённые

$$\hat{b}_k^{\dagger} \doteq \sum_{\alpha} b_{k\alpha}^* \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \quad (115)$$

Условие полноты позволяет выразить старые операторы через новые:

$$\hat{a}_{\alpha} \doteq \sum_k b_{k\alpha}^* \hat{b}_k \quad (116)$$

и

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \doteq \sum_k b_{k\alpha} \hat{b}_k^{\dagger}.$$

Соотношения коммутации новых операторов в силу ортонормированности:

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^{\dagger}] = \sum_{\alpha, \alpha'} b_{k'\alpha'}^* b_{k\alpha} [\hat{a}_{\alpha}, \hat{a}_{\alpha'}^{\dagger}] = \delta_{kk'}. \quad (117)$$

Также очевидно, что

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = 0 = [\hat{b}_k^{\dagger}, \hat{b}_{k'}^{\dagger}]. \quad (118)$$

Новые операторы имеют бозевские соотношения коммутации. Выясним физический смысл этих операторов. С помощью (116) можно выразить оператор напряжённости  $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  через  $\{\hat{b}_n\}_n$ :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \Phi_k(\mathbf{r}, t) \hat{b}_k, \quad (119)$$

где

$$\Phi_k(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \sqrt{2\pi\omega_{\alpha}} u_{\alpha}(\mathbf{r}) b_{k\alpha}^* \exp[-i\omega_{\alpha}t] \quad (120)$$

– некоторые функции. Они могут иметь сложную зависимость от пространственных координат и времени, но их можно трактовать как конфигурационные функции некоторого нового набора мод, которые называются модами когерентности. Операторы  $\hat{b}_k$  ( $\hat{b}_k^{\dagger}$ ) оказываются тогда операторами уничтожения (рождения) квантов в моде когерентности с номером  $k$ . Происхождение термина "мода когерентности" следующее. Заметим, что

$$\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle = \sum_{k, k'} \Phi_k(x_1)^* \Phi_{k'}(x_2) \langle \hat{b}_k^{\dagger} \hat{b}_{k'} \rangle. \quad (121)$$

Пользуясь (114) и (115), имеем

$$\langle \hat{b}_k^{\dagger} \hat{b}_{k'} \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} b_{k\alpha}^* \Gamma_{\alpha\alpha'} b_{k'\alpha'} = \lambda_k \delta_{k, k'}. \quad (122)$$

Таким образом,

$$\Gamma^{(1)}(x_1; x_2) = \sum_k \lambda_k \Phi_k(x_1)^* \Phi_k(x_2). \quad (123)$$

Функция когерентности в терминах мод когерентности предстаёт в виде суммы слагаемых, факторизующих зависимость

от координат  $x_1$  и  $x_2$ . Собственные числа  $\lambda_k$  приобретают физический смысл чисел квантов в модах когерентности.

Развитый подход позволяет сформулировать первое утверждение: если возбуждена одна мода когерентности, т.е.

$$\lambda_k = \delta_{k,k_0} \lambda_{k_0}, \quad (124)$$

функция когерентности 1-ого порядка факторизуется. Факторизованность влечёт единичность модуля нормированной функции когерентности. Действительно, в рассматриваемом случае

$$\gamma^{(1)}(x_1, ; x_2) = \frac{\Phi_{k_0}(x_1)^* \Phi_{k_0}(x_2)}{|\Phi_{k_0}(x_1)| |\Phi_{k_0}(x_2)|}. \quad (125)$$

и, следовательно, для всех  $x_1$  и  $x_2$

$$|\gamma^{(1)}(x_1, ; x_2)| = 1. \quad (126)$$

Предположим теперь, что имеет место условие (126), т.е.

$$|\Gamma^{(1)}(x_1; x_2)|^2 = \Gamma^{(1)}(x_1; x_1) \Gamma^{(1)}(x_2; x_2). \quad (127)$$

– факторизуется модуль функции когерентности. Можно ли из этих посылок вывести факторизуемость самой функции когерентности 1-ого порядка? Покажем, что это действительно так. Естественно считать, что в некоторой точке  $x_0$  пространства-времени отлична от нуля вероятность обнаружить фотон:

$$\Gamma^{(1)}(x_0; x_0) \neq 0. \quad (128)$$

Введём оператор

$$\hat{A}(x) \doteq \hat{E}^{(+)}(x) - \frac{\Gamma^{(1)}(x_0; x)}{\Gamma^{(1)}(x_0; x_0)} \hat{E}^{(+)}(x_0). \quad (129)$$

Вычисление  $\langle \hat{A}(x)^\dagger \hat{A}(x) \rangle$  с учётом условия (127) для точек  $x$  и  $x_0$  даёт простой результат:

$$\langle \hat{A}(x)^\dagger \hat{A}(x) \rangle \equiv Tr \left( \hat{\rho} \hat{A}(x)^\dagger \hat{A}(x) \right) = 0. \quad (130)$$

У статистического оператора существует диагональное представление (в общем случае не единственное и не ортонормированное):

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} \rho_{\psi} |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (131)$$

где  $\rho_{\psi} > 0$ . Следовательно, (130) можно переписать в виде

$$\sum_{\psi} \rho_{\psi} \langle \psi | \hat{A}(x)^\dagger \hat{A}(x) | \psi \rangle = 0. \quad (132)$$

Из положительности  $\rho_{\psi}$  и неотрицательности матричных элементов в (132) заключаем, что для любого  $|\psi\rangle$  из (131) имеют место равенства

$$\hat{A}(x)|\psi\rangle = 0; \quad \langle \psi | \hat{A}(x)^\dagger = 0, \quad (133)$$

откуда следует

$$\hat{A}(x)\hat{\rho} = 0 = \hat{\rho}\hat{A}(x)^\dagger. \quad (134)$$

Из левого равенства (134) при  $x = x_2$  и определения (129) получаем

$$\hat{E}^{(+)}(x_2)\hat{\rho} = \frac{\Gamma^{(1)}(x_0; x_2)}{\Gamma^{(1)}(x_0; x_0)} \hat{E}^{(+)}(x_0)\hat{\rho}. \quad (135)$$

Аналогично из правого равенства при  $x = x_1$

$$\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(x_1) = \frac{\Gamma^{(1)}(x_1; x_0)}{\Gamma^{(1)}(x_0; x_0)} \hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(x_0). \quad (136)$$

С помощью (135) и (136) легко вычислить  $\Gamma^{(1)}(x_1; x_2)$ :

$$\Gamma^{(1)}(x_1; x_2) \equiv Tr \left( \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) \right) = \frac{\Gamma^{(1)}(x_1; x_0) \Gamma^{(1)}(x_0; x_2)}{\Gamma^{(1)}(x_0; x_0)}. \quad (137)$$

Если ввести функцию

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\Gamma^{(1)}(x_0; x)}{\sqrt{\Gamma^{(1)}(x_0; x_0)}}, \quad (138)$$

то результат (137) можно переписать в виде

$$\Gamma^{(1)}(x_1; x_2) \equiv \mathcal{E}(x_1)^* \mathcal{E}(x_2). \quad (139)$$

Функция когерентности 1-ого порядка оказывается факторизованной. Обратившись к выражению (123), можно заключить, что возбуждена единственная мода когерентности с конфигурационной функцией, пропорциональной  $\mathcal{E}(x)$ .

Таким образом, доказана теорема об эквивалентности трёх следующих утверждений: *факторизуемость функции когерентности 1-ого порядка, возбуждение единственной моды когерентности, равенство единице модуля нормированной функции когерентности.*

Условие

$$|\gamma^{(n)}(x_n, \dots, x_1; x'_1, \dots, x'_n)| = 1 \quad (140)$$

для  $n = 1, \dots, N$  используется для определения когерентности  $N$ -ого порядка.



## 5 Лекция 5

**Когерентность 2-ого порядка.** Функция когерентности 2-ого порядка зависит в общем случае от координат четырёх точек в пространстве-времени:

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x'_2) \hat{E}^{(+)}(x'_1) \rangle. \quad (141)$$

Мы, однако, будем интересоваться случаем  $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2$ . Таким образом мы вернёмся к анализу функции, появившейся при рассмотрении глауберовской теории фотоотсчётов в Лекции 3. Нормированная функция когерентности (для пары точек)  $\gamma^{(2)}(x_1, x_2)$  определяется согласно (102):

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2) \doteq \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_1) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_1) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle}. \quad (142)$$

и имеет смысл отношения вероятности регистрации пары фотонов в  $x_1$  и  $x_2$  к произведению вероятностей *независимых* событий регистраций фотонов в этих точках пространства-времени. Таким образом,  $\gamma^{(2)}(x_1, x_2)$  описывает корреляции между событиями регистрации квантов поля. В случае  $\gamma^{(2)}(x_1, x_2) > 1$  мы говорим о группировке событий регистрации, когда обнаружение фотона в одной точке пространства-времени повышает вероятность обнаружить фотон во второй точке, а в случае  $\gamma^{(2)}(x_1, x_2) < 1$  – об антигруппировке событий фоторегистрации.

Предположим, что имеет место когерентность 1-ого порядка, т.е. возбуждена единственная мода когерентности. Пусть  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  – операторы уничтожения и рождения фотона в этой моде, а  $\Phi(x)$  – её конфигурационная функция. Форма последней совершенно не важна для дальнейшего, поскольку,

как легко заметить,  $\gamma^{(2)}(x_1, x_2)$  оказывается в рассматриваемом случае независимой от координат:

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \gamma^{(2)} \equiv \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad (143)$$

Интересно рассмотреть классический вариант данного выражения. В этом случае оператор  $\hat{a}$  заменяется комплексной амплитудой  $\alpha$  моды, а  $\hat{a}^\dagger$  – сопряжённой амплитудой  $\alpha^*$ . Распределение проводится не по статистическому оператору квантованной моды, а по классическому распределению вероятности реализации того или иного значения амплитуды:

$$\gamma_{cl}^{(2)} = \frac{\langle |\alpha|^4 \rangle_{cl}}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}^2}. \quad (144)$$

Имеет место следующая простая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \gamma_{cl}^{(2)} &= 1 + \left\langle \frac{|\alpha|^2}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}} \left( \frac{|\alpha|^2}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}} - 1 \right) \right\rangle_{cl} = \\ &= 1 + \left\langle \left( \frac{|\alpha|^2}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}} - 1 + 1 \right) \left( \frac{|\alpha|^2}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}} - 1 \right) \right\rangle_{cl} = \\ &= 1 + \left\langle \left( \frac{|\alpha|^2}{\langle |\alpha|^2 \rangle_{cl}} - 1 \right)^2 \right\rangle_{cl}. \end{aligned} \quad (145)$$

Последнее выражение позволяет утверждать, что всегда

$$\gamma_{cl}^{(2)} \geq 1. \quad (146)$$

т.е. в классической стохастической оптике должна иметь место группировка фотоотсчётов. В квантовом случае неравенство (146) может нарушаться.

Вернёмся к выражению (143). Пользуясь бозевским соотношением коммутации  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  и вводя обозначение  $\hat{n} \doteq \hat{a}^\dagger \hat{a}$  для оператора числа квантов в моде, можно переписать (143):

$$\gamma^{(2)} = 1 + \frac{(\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2) - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}. \quad (147)$$

Выражение в круглых скобках в числителе есть квадрат дисперсии  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$  числа квантов. Мы видим, что в случае  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle$  (сверхпуассоновская статистика квантов) имеет место группировка, а при  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$  (субпуассоновская статистика) – антигруппировка событий фотоотсчётов.

Выражение устанавливает связь между тремя параметрами:  $\gamma^{(2)}$ ,  $\langle \hat{n} \rangle$  и  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ . Для дальнейшего удобно переписать его в виде

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle + (\gamma^{(2)} - 1) \langle \hat{n} \rangle^2 \quad (148)$$

и считать, что  $\gamma^{(2)}$  параметризует параболическую зависимость квадрата дисперсии от среднего числа квантов. Прямая линия  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle$  как график такой зависимости отвечает случаю  $\gamma^{(2)} = 1$  (см. рис. 15) Выше этой линии лежит "классическая" область, где  $\gamma^{(2)} > 1$ . Поучительный пример зависимости из этой области даётся тепловым распределением числа квантов. Если возбуждённая мода когерентности является обыкновенной гармонической модой, для неё имеется хорошо известное равновесное состояние  $\hat{\rho}_{th}$ . Вероятность найти  $n$  квантов в этом состоянии даётся распределением Гиббса для полевого осциллятора, имеющего температуру  $T$ :

$$\langle n | \hat{\rho}_{th} | n \rangle = (1 - \exp[-\hbar\omega/k_B T]) \exp[-\hbar\omega n/k_B T]. \quad (149)$$

Среднее число квантов  $\langle \hat{n} \rangle$  для этого распределения

$$\langle \hat{n} \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n \langle n | \hat{\rho}_{th} | n \rangle = \frac{1}{\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1} \quad (150)$$

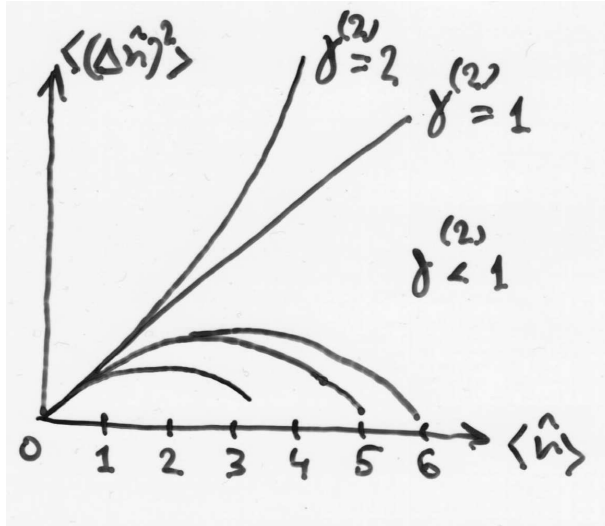


Рис. 15.

С его помощью распределение (149) переписывается в виде

$$\langle n | \hat{\rho}_{th} | n \rangle = \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle)^{n+1}}. \quad (151)$$

откуда нетрудно вычислить квадрат дисперсии

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle \hat{n} \rangle)^2 \langle n | \hat{\rho}_{th} | n \rangle = \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{n} \rangle^2 \quad (152)$$

Из этого выражения следует  $\gamma^{(2)} = 2$ , что весьма близко к результатам измерения корреляций между фотоотсчётами от тепловых источников.

Область под биссектрисой квадранта на рис. 15 отвечает антигруппировке ( $\gamma^{(2)} < 1$ ). Это квантовая область. Парабола зависимости квадрата дисперсии от среднего числа кван-

тов обращена вниз. Может показаться, что она должна пересечь ось абсцисс при некотором положительном значении  $\langle \hat{n} \rangle$ . Заметим, однако, что это пересечение не может иметь место при дробных значениях  $\langle \hat{n} \rangle$ . Действительно, дробность будет означать, что существует разброс вероятности обнаружить то или иное число квантов. В этом случае должна быть отлична от нуля дисперсия этого числа, а она по определению нулевая во всех точках горизонтальной оси. Поэтому, если график "нацеливается" пересечь ось абсцисс в дробной точке, он должен остановиться, не достигая оси, как это показано на рис. 15. Следовательно, вблизи оси абсцисс есть запретные области, куда график проникнуть не может. Определим их. С этой целью заметим, что для любого распределения числа квантов (и вообще любых объектов) существует универсальное неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-m)(n-m-1) \langle n | \hat{\rho} | n \rangle \geq 0 \quad (153)$$

Здесь  $m$  – любое неотрицательное целое число. Раскрывая скобки и выражая левую часть через дисперсию и среднее число квантов, получаем

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \geq -(\langle \hat{n} \rangle - m)^2 + (\langle \hat{n} \rangle - m). \quad (154)$$

Когда  $m$  пробегает целые числа, начиная с нуля, правая часть, как функция  $\langle \hat{n} \rangle$ , описывает параболы – границы запрещённых областей. Квадрат дисперсии не может оказаться ниже их парабол.

Уже из рис. 15 видно, что при  $\gamma^{(2)} < 1$  максимальное среднее число квантов  $\langle \hat{n} \rangle_{max}$  оказывается ограниченным. Вычислим это значение. Введём  $\xi \doteq (1 - \gamma^{(2)})^{-1}$  и перепишем (148)

в виде

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle - \frac{1}{\xi} \langle \hat{n} \rangle^2 \quad (155)$$

Если бы не существовало ограничения (154), график (155) пересёк бы ось абсцисс в точке  $\xi$ . Если  $\xi$  – целое число, мы имеем  $\langle \hat{n} \rangle_{max} = \xi$ . Когда  $\xi$  – дробное число, оно лежит между своей целой частью  $[\xi]$  и следующим целым числом  $[\xi] + 1$ . На эти точки опирается граница одной из запретных областей (154) при  $m = [\xi]$ . В точке  $\langle \hat{n} \rangle_{max}$  пересекается кривая (155) и граница запрещённой области:

$$\langle \hat{n} \rangle_{max} - \frac{1}{\xi} \langle \hat{n} \rangle_{max}^2 = -(\langle \hat{n} \rangle_{max} - [\xi])^2 + \langle \hat{n} \rangle_{max} - [\xi]. \quad (156)$$

Из этого квадратного уравнения можно найти  $\langle \hat{n} \rangle_{max}$ .

## 6 Лекция 6

**Когерентные состояния.** Предположим, что существует состояние квантованного поля, собственное для (несамосопряжённого!) оператора  $\hat{E}^{(+)}(x)$  в любой точке пространства-времени:

$$\hat{E}^{(+)}(x)|\psi\rangle = \mathcal{E}(x)|\psi\rangle. \quad (157)$$

Собственное значение  $\mathcal{E}(x)$  оказывается в общем случае комплекснозначной функцией координат точки. Нетрудно заметить, что в состоянии (157) поле оказывается когерентным в любом порядке. Действительно, по определению (101), мы имеем

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) = \mathcal{E}^*(x_1) \dots \mathcal{E}^*(x_n) \mathcal{E}(x'_1) \dots \mathcal{E}(x'_n). \quad (158)$$

Модули всех нормированных функций когерентности  $\gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n)$  оказываются единичными. Поскольку это верно и для  $\gamma^{(1)}(x; x')$ , поле можно представить как возбуждение единственной моды когерентности. В этом случае в разложении (119) для оператора  $\hat{E}^{(+)}(x)$  при его действии на  $|\psi\rangle$  можно удержать единственное слагаемое, отвечающее возбуждённой моде:

$$\hat{E}^{(+)}(x)|\psi\rangle = \Phi(x)\hat{a}|\psi\rangle. \quad (159)$$

где  $\hat{a}$  – оператор уничтожения кванта возбуждённой моды, а  $\Phi(x)$  – её пространственно-временная конфигурация. Поскольку с одной стороны

$$\Gamma^{(1)}(x; x') = \mathcal{E}^*(x)\mathcal{E}(x'), \quad (160)$$

а с другой

$$\Gamma^{(1)}(x; x') = \Phi^*(x)\Phi(x')\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle, \quad (161)$$

мы заключаем, что

$$\mathcal{E}(x) = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle^{1/2} \Phi(x) e^{i\varphi}, \quad (162)$$

где  $\varphi$  – некоторая фаза, не зависящая от  $x$ . Из (157) следует

$$\hat{a}|\psi\rangle = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle^{1/2} e^{i\varphi} |\psi\rangle, \quad (163)$$

т.е. состояние  $|\psi\rangle$  оказывается собственным для оператора уничтожения квантов в единственной возбуждённой моде когерентности. Введём для собственного значения из (163) обозначение  $\alpha$ :

$$\alpha = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle^{1/2} e^{i\varphi}. \quad (164)$$

С помощью этой же буквы принято обозначать состояние  $|\psi\rangle$ :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (165)$$

Это определение когерентного состояния, введённого в своё время Глаубером. Мы подробно изучим свойства когерентных состояний, поскольку они оказываются очень естественными объектами квантовой оптики, своеобразным мостом, связывающим её с оптикой классической.

Определение (165) позволяет нам найти разложение для  $|\alpha\rangle$  по базису состояний Фока, т.е. в ортонормированном базисе состояний с заданным числом квантов:  $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ . Поскольку квантованная полевая мода является фактически квантовым осциллятором, мы имеем правило действия оператора  $\hat{a}^\dagger$  на состояния Фока:  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ . Нам понадобится сопряжённый вариант этого соотношения:

$$\langle n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle n+1 | \quad (166)$$

В разложении

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | \alpha \rangle. \quad (167)$$



нам пока неизвестны амплитуды вероятности  $\langle n|\alpha\rangle$  обнаружить в когерентном состоянии  $n$  квантов. Для нахождения этих амплитуд умножим обе части (165) на сопряжённое состояние  $\langle n|$  и в левой части воспользуемся (166):

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \quad (168)$$

Из этого равенства получаем

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (169)$$

Чтобы определить  $\langle 0|\alpha\rangle$  – амплитуду вероятности не обнаружить ни одного кванта, будем считать состояние  $|\alpha\rangle$  нормированным:

$$1 = \langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (170)$$

Отсюда следует

$$|\langle 0|\alpha\rangle| = \exp(-|\alpha|^2/2). \quad (171)$$

Осталась неопределённой фаза амплитуды  $\langle 0|\alpha\rangle$ . По соглашению её принимают равной нулю. Таким образом,

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (172)$$

Заметим, что  $|\alpha=0\rangle = |n=0\rangle$ . Следовательно, не возникает двусмысленности при интерпретации состояния  $|0\rangle$ . Вероятность обнаружить в когерентном состоянии  $n$  фотонов даётся квадратом модуля амплитуды (169):

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha|^2). \quad (173)$$

Это есть знакомое распределение Пуассона. Квадрат модуля параметра  $\alpha$  имеет физический смысл среднего числа квантов:  $|\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle$ . При этом само число  $\alpha$  есть также среднее значение (положительночастотной) амплитуды поля:  $\alpha = \langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle$ .

Когерентные состояния нумеруются числом  $\alpha$ , пробегающим всю комплексную плоскость. Следовательно, множество когерентных состояний имеет мощность континуума. В этом их коренное отличие от состояний Фока и состояний из любого другого ортонормированного базиса квантованной моды, образующих счётное множество. Когерентные состояния нормированы, но не ортогональны. Действительно, скалярное произведение двух когерентных состояний

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = \exp \left( -|\alpha_1|^2/2 - |\alpha_2|^2/2 + \alpha_1^* \alpha_2 \right) \quad (174)$$

не обращается в нуль при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Если, однако,  $|\alpha_1 - \alpha_2| \gg 1$ , модуль правой части становится мал:

$$|\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle| = \exp \left( -|\alpha_1 - \alpha_2|^2/2 \right) \quad (175)$$

и состояния оказываются "почти ортогональными".

Отсутствие ортогональности различных когерентных состояний может представляться некоторым неудобством. Это однако компенсируется определёнными достоинствами, что будет показано далее. Множество когерентных состояний обладает полнотой, как и счётный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Чтобы доказать это, достаточно продемонстрировать разложимость по множеству  $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$  любого состояния Фока  $|n\rangle$ . Докажем, что

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | n \rangle d^2\alpha. \quad (176)$$

Здесь интегрирование осуществляется по всей комплексной плоскости. Символ  $d^2\alpha$  здесь и далее понимается как произведение дифференциалов:

$$d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha. \quad (177)$$

В (176) целесообразно перейти к полярным координатам на комплексной плоскости. При этом  $\alpha = re^{i\varphi}$ ,  $d^2\alpha = r dr d\varphi$ . Проверка равенства сводится к рутинному интегрированию.

**Оператор смещения.** Ранее уже отмечалось, что вакуумное состояние входит в множество когерентных состояний. Для дальнейшего очень полезным окажется умение получать из вакуума любое когерентное состояние. В теории это должен делать некоторый оператор, символизирующий, как будет в своё время показано, действие некоторого источника излучения. Для нахождения этого оператора обратимся к соотношениям (166). Последовательным применением оператора рождения можно получить любое фокковское состояние из вакуумного:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (178)$$

Подставляя это выражение в (172), имеем

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle, \quad (179)$$

т.е.

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle. \quad (180)$$

Мы получили оператор, трансформирующий вакуумное состояние в когерентное состояние  $|\alpha\rangle$ . Он, однако, не очень удобен в обращении и по сути не является единственным возможным. Действительно, мы не изменим результат, если в

правой части подействуем сначала на вакуумное состояние операторной функцией  $f(\hat{a})$ , чьё тейлоровское разложение начинается с 1:

$$\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)f(\hat{a})|0\rangle. \quad (181)$$

Есть смысл постараться подобрать такую функцию  $f(\hat{a})$ , которая сделала бы трансформирующий оператор унитарным. Унитарность в квантовой физике есть очень полезное и удобное свойство. Покажем, что для унитарности надо выбрать

$$f(\hat{a}) = \exp(-\alpha^*\hat{a}). \quad (182)$$

В этом случае у нас возникает произведение операторных экспонент

$$\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\exp(-\alpha^*\hat{a}). \quad (183)$$

Мы не можем обращаться с ними как с обычными числовыми экспонентами и просто просуммировать показатели, поскольку последние не коммутируют. Заметим, однако, что коммутатор показателей является уже обычным числом. Это обстоятельство позволит довольно быстро свести к одной экспоненте. Такого рода операции часто необходимо делать в квантовооптических расчётах. Соответствующие результаты называются иногда формулами Кемпбелла-Хаусдорфа.

Для перемножения экспонент в (183) обозначим  $\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{B} = -\alpha^*\hat{a}$  и введём вспомогательный параметр  $x$ :

$$\hat{I}(x) = \exp(\hat{A}x)\exp(\hat{B}x). \quad (184)$$

Нам надо представить  $\hat{I}(x)$  в виде одной экспоненты с операторным показателем и взять значение этого показателя при  $x = 1$ . Продифференцируем  $\hat{I}(x)$  по  $x$ , не забывая о некоммутативности  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ :

$$\frac{d}{dx}\hat{I}(x) = \exp(\hat{A}x)(\hat{A} + \hat{B})\exp(\hat{B}x) = \quad (185)$$

$$\exp(\hat{A}x)(\hat{A} + \hat{B}) \exp(-\hat{A}x)\hat{I}(x).$$

Введём оператор  $\hat{B}(x)$ :

$$\hat{B}(x) \doteq \exp(\hat{A}x)\hat{B} \exp(-\hat{A}x). \quad (186)$$

и продифференцируем его по  $x$ :

$$\frac{d}{dx}\hat{B}(x) = \exp(\hat{A}x)[\hat{A}, \hat{B}] \exp(-\hat{A}x) = [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (187)$$

Последнее равенство в (187) есть следствие коммутативности  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , о чём было упомянуто выше. Решение уравнения (187) с очевидным начальным условием  $\hat{B}(0) = \hat{B}$  имеет вид

$$\hat{B}(x) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]x. \quad (188)$$

Подставляя его в (185), приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx}\hat{I}(x) = \left( \hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]x \right) \hat{I}(x). \quad (189)$$

Начальное условие  $\hat{I}(0) = \hat{1}$  приводит к следующему решению:

$$\hat{I}(x) = \exp \left( \hat{A}x + \hat{B}x + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]x^2 \right). \quad (190)$$

Таким образом,

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp \left( \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] \right). \quad (191)$$

При коммутативности  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  это выражение превращается в хорошо известное правило перемножения экспонент. Возвращаясь к (182), получаем окончательно

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha, \alpha^*)|0\rangle, \quad (192)$$

где

$$\hat{D}(\alpha, \alpha^*) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (193)$$

Оператор  $\hat{D}(\alpha, \alpha^*)$  (от слова displacement) действительно оказался унитарным, т.е.

$$\hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*) = \hat{D}^{-1}(\alpha, \alpha^*) = \hat{D}(-\alpha, -\alpha^*). \quad (194)$$

Указание  $\alpha^*$  наряду с  $\alpha$  как аргументов служит предостережением от взгляда на оператор  $\hat{D}$  как на голоморфную функцию комплексного параметра  $\alpha$ .

## 7 Лекция 7

**Глауберовское представление статистического оператора.** Как было показано в предыдущей лекции, множество когерентных состояний полно, но различные состояния не ортогональны. Эта "переполненность" набора когерентных состояний является полезной – она позволяет ввести очень удобное представление для статистического оператора, известное как представление Глаубера.

Пусть  $\hat{\rho}$  – статистический оператор. Выбор некоторого *ортонормированного* базиса  $\{|i\rangle\}_{i=0}^{\infty}$  состояний моды (например, базиса Фока) позволяет перейти к матричному представлению оператора  $\hat{\rho}$ :

$$\hat{\rho} = \sum_{i,i'=0}^{\infty} |i\rangle \langle i|\hat{\rho}|i'\rangle \langle i'|. \quad (195)$$

В этом выражении использовано свойство полноты базиса. Набор чисел  $\langle i|\hat{\rho}|i'\rangle$  содержит всю информацию, заключённую в статистическом операторе, и известен как матрица плотности. Диагональные элементы являются вероятностями обнаружить моду в состоянии  $|i\rangle$ , а недиагональные элементы отвечают за свойства состояния моды, облачаемые в слова "когерентность", "интерференция" и "суперпозиция". Полнота множества когерентных состояний  $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$  позволяет написать выражение, аналогичное (195):

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int |\alpha\rangle \langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha'\rangle \langle \alpha'| d^2\alpha d^2\alpha'. \quad (196)$$

Статистическому оператору  $\hat{\rho}$  в этом представлении сопоставляется функция  $\langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha'\rangle$  *двух* комплексных переменных. Это есть некоторый аналог матрицы плотности. Излагаемый

ниже подход Глаубера позволяет ввести некоторую функцию *одной* комплексной переменной в качестве представителя статистического оператора.

Заметим, что любой физически осмысленный вопрос о квантованной моде можно свести к проблеме вычисления или измерения величин  $\langle \hat{a}^\dagger{}^m \hat{a}^n \rangle$ , где  $m$  и  $n$  – неотрицательные целые числа. Можно ввести очень удобный инструмент для вычисления  $\langle \hat{a}^\dagger{}^m \hat{a}^n \rangle$ . Это так называемая характеристическая функция

$$\chi(\lambda, \lambda^*) \doteq Tr \left( \hat{\rho} \exp(\lambda \hat{a}^\dagger) \exp(-\lambda^* \hat{a}) \right). \quad (197)$$

Нетрудно заметить, что дифференцирование по  $\lambda$  и  $\lambda^*$  нужное число раз позволяет вычислить  $\langle \hat{a}^\dagger{}^m \hat{a}^n \rangle$  для любых  $m$  и  $n$ :

$$\langle \hat{a}^\dagger{}^m \hat{a}^n \rangle = (-1)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial^m \lambda \partial^n \lambda^*} \chi(\lambda, \lambda^*) |_{\lambda=0}. \quad (198)$$

Предположим существование Фурье-образа характеристической функции

$$\chi(\lambda, \lambda^*) = \int P(\alpha, \alpha^*) \exp(\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha) d^2 \alpha, \quad (199)$$

$$P(\alpha, \alpha^*) = \int \chi(\lambda, \lambda^*) \exp(\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*) \frac{d^2 \lambda}{\pi^2}$$

Это так называемая симплектическая форма Фурье-преобразования. Показатель экспоненты, выраженный через действительные и мнимые части величин  $\lambda = \lambda' + i\lambda''$  и  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ , имеет вид:

$$\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha = 2i\lambda''\alpha' - 2i\lambda'\alpha'', \quad (200)$$



Подстановка первого выражения из (199) в (198) даёт

$$\langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*m} \alpha^n d^2 \alpha. \quad (201)$$

Заметим, что правая часть напоминает классическое усреднение комбинации  $\alpha^{*m} \alpha^n$  комплексной амплитуды по распределению  $P(\alpha, \alpha^*)$ . Введём теперь некоторый вспомогательный оператор  $\hat{\tilde{\rho}}$ :

$$\hat{\tilde{\rho}} \doteq \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha. \quad (202)$$

и вычислим среднее от  $\hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n$  по оператору  $\hat{\tilde{\rho}}$ :

$$\begin{aligned} Tr \left( \hat{\tilde{\rho}} \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n \right) &= \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n | \alpha \rangle d^2 \alpha = \\ &= \int P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*m} \alpha^n d^2 \alpha. \end{aligned} \quad (203)$$

Результат, как мы видим, совпал с (201). Это значит, что операторы  $\hat{\tilde{\rho}}$  и  $\hat{\rho}$  не различимы физически – они дают одинаковое значение любых средних, относящихся к рассматриваемой моде поля. Следовательно, мы можем их отождествить:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha. \quad (204)$$

Сравнение этой формулы с (196) обнаруживает её явную лаконичность и простоту. Заметим, что не следует трактовать  $P(\alpha, \alpha^*)$  как плотность вероятности обнаружить моду в состоянии  $|\alpha\rangle$ . Действительно, скорее на это может претендовать величина  $\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle / \pi$  (множитель  $\pi^{-1}$  обеспечивает единственный результат интегрирования по  $\alpha$ ), которая связана с

$P(\alpha, \alpha^*)$  интегральным соотношением

$$\frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \int P(\beta, \beta^*) |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 d^2 \beta. \quad (205)$$

Функция  $P(\alpha, \alpha^*)$ , известная как  $P$ -функция Глаубера, несёт черты классического распределения вероятности, поскольку, как легко убедиться, она действительна и нормирована:

$$1 = \text{Tr} \hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha. \quad (206)$$

Однако,  $P$ -функция не обязана быть положительной во всех точках  $\alpha$ -плоскости. Поэтому её иногда называют квазивероятностным распределением.

**Совместное действие двух источников.** Используя оператор  $\hat{D}$  (193), представим формулу (204) в виде

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) \hat{D}(\alpha, \alpha^*) |0\rangle \langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha. \quad (207)$$

Её можно трактовать как превращение изначально вакуумного статистического оператора  $|0\rangle \langle 0|$  в статистический оператор  $\hat{\rho}$  в результате включения некоторого источника излучения. Такой взгляд оказывается полезным при рассмотрении нескольких независимых источников. Пусть включение источника 1 приводит к возникновению состояния  $\hat{\rho}_1$  нашей моды, а включение источника 2 создаёт состояние  $\hat{\rho}_2$ :

$$\hat{\rho}_i = \int P_i(\alpha, \alpha^*) \hat{D}(\alpha, \alpha^*) |0\rangle \langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha. \quad (208)$$

где  $i = 1, 2$ . Какое состояние возникнет при включении обоих источников? Поскольку источники по условию независимы,

включение второго источника после того, как первый источник создал состояние  $\hat{\rho}_1$ , должно привести к состоянию

$$\hat{\rho}_{1+2} = \int P_2(\alpha, \alpha^*) \hat{D}(\alpha, \alpha^*) \hat{\rho}_1 \hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (209)$$

Нам необходимо представить это состояние в виде (207) и определить глауберовскую функцию  $P_{1+2}(\alpha, \alpha^*)$ . Подставив в (209) выражение (208) для  $\hat{\rho}_1$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{1+2} &= \\ &= \int P_2(\alpha, \alpha^*) P_1(\beta, \beta^*) \hat{D}(\alpha, \alpha^*) \hat{D}(\beta, \beta^*) |0\rangle \langle 0| \hat{D}^\dagger(\beta, \beta^*) \hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha d^2\beta. \end{aligned} \quad (210)$$

Возникающее здесь произведение  $\hat{D}$ -операторов вычисляются согласно (191):

$$\hat{D}(\alpha, \alpha^*) \hat{D}(\beta, \beta^*) = \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \hat{D}(\alpha + \beta, \alpha^* + \beta^*). \quad (211)$$

Заметим, что экспоненциальный множитель в (211) имеет чисто мнимый показатель. Следовательно, (210) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{1+2} &= \\ &= \int P_2(\alpha, \alpha^*) P_1(\beta, \beta^*) \hat{D}(\alpha + \beta, \alpha^* + \beta^*) |0\rangle \langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha + \beta, \alpha^* + \beta^*) d^2\alpha d^2\beta. \end{aligned} \quad (212)$$

Переобозначаем переменные интегрирования и получаем, что  $P_{1+2}(\alpha, \alpha^*)$  есть простая свёртка функций  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_{1+2}(\alpha, \alpha^*) = \int P_1(\alpha - \beta, \alpha^* - \beta^*) P_2(\beta, \beta^*) d^2\beta. \quad (213)$$

Симметрия операции свёртки сразу позволяет утверждать, что порядок включения источников не влияет на результат.

Поскольку Фурье-образ свёртки есть произведение Фурье-образов, мы получаем простое, но изначально неочевидное соотношение между характеристическими функциями состояний  $\hat{\rho}_1$ ,  $\hat{\rho}_2$  и  $\hat{\rho}_{1+2}$ :

$$\chi_{1+2}(\lambda, \lambda^*) = \chi_1(\lambda, \lambda^*)\chi_2(\lambda, \lambda^*). \quad (214)$$

## 8 Лекция 8

**Квантовое кинетическое уравнение.** Нашей ближайшей целью является вывод квантового кинетического уравнения для полевой моды. Мы будем считать её открытой квантовой системой, обменивающейся с окружением энергией и информацией. Эволюция статистического оператора оказывается поэтому необратимой.

Мы предположим, что необратимость превносится в кинетическое уравнение для  $\hat{\rho}$  отдельными слагаемыми:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\hat{H}_0, \hat{\rho}(t)] + \left(\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t)\right)_{irrev}. \quad (215)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает обычную (обратимую) динамику моды под действием собственного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (216)$$

Нам необходимо вывести вид  $(d\hat{\rho}(t)/dt)_{irrev}$  из физических соображений. Будем использовать простую частную модель, но полученные результаты окажутся довольно общими. Предположим, что акты взаимодействия моды с окружением очень короткие. На протяжении такого акта можно пренебречь собственной динамикой моды. Предположим также, что каждый раз мода вступает в контакт с некоторым стандартным фрагментом окружения. А именно, будем считать, что через пространственную область, занятую модой, случайно с частотой  $\nu$  раз в секунду пролетают двухуровневые атомы, находящиеся изначально в состоянии  $\hat{\rho}_{at}$ . Во время пролёта атома через область моды они образуют единую систему, эволюционирующую под действием гамильтониана взаимодействия. Нам уже встречалась похожая ситуация при рассмотрении

глауберовской теории фотоотсчётов. Но теперь атом у нас двухуровневый с основным состоянием  $|g\rangle$  и возбуждённым состоянием  $|e\rangle$ . В резонансном дипольном приближении гамильтониан взаимодействия моды и атома запишем в виде

$$\hat{V} = \Omega_0(\hat{s}_+\hat{a} + \hat{s}_-\hat{a}^\dagger). \quad (217)$$

Здесь  $\hat{s}_+ = |e\rangle\langle g|$  и  $\hat{s}_- = |g\rangle\langle e|$  – операторы повышения и понижения энергии атома, константа  $\Omega_0$  размерности частоты задаёт эффективность взаимодействия. Пусть  $\tau$  – длительность пролёта атома. Считаем, что она настолько мала, что, как уже говорилось, собственные динамики атома и моды не успевают проявить себя. Также будем считать, что все остальные характерные времена задачи значительно превосходят  $\tau$ . Следовательно, состояние  $\hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at}$  системы "мода+атом" до взаимодействия меняется на интервале  $\tau$  следующим образом:

$$\hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at} \mapsto \hat{U}(\hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{U}^\dagger, \quad (218)$$

где

$$\hat{U} = \exp[-i\tau\hat{V}]. \quad (219)$$

Поскольку такие события происходят с частотой  $\nu$ , запишем необратимые слагаемые в (215), предполагая что с данной частотой левая часть (218) уступает место правой:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t)\right)_{irrev} = \nu Tr_{at} \left[ \hat{U}(\hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{U}^\dagger - \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at} \right]. \quad (220)$$

Здесь фигурирует след по состояниям атома, поскольку нас интересует только эволюция статистического оператора полевой моды. Оператор  $\hat{U}$  унитарен. Удобно представить его в виде

$$\hat{U} = \hat{1} + i\hat{F}, \quad (221)$$

где единичный оператор отвечает отсутствию взаимодействия атома и поля, и всё взаимодействие отражено в  $\hat{F}$ . Из унитарности  $\hat{U}$  следует равенство

$$\imath(\hat{F}^\dagger - \hat{F}) = \hat{F}^\dagger \hat{F}, \quad (222)$$

известное как оптическая теорема. Преобразуем с помощью (222) внутренность квадратных скобок из (220):

$$\begin{aligned} & \imath \hat{F}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at}) - \imath(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{F}^\dagger + \hat{F}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{F}^\dagger \equiv \\ & \frac{1}{2}(\imath \hat{F} + \imath \hat{F}^\dagger + \imath \hat{F} - \imath \hat{F}^\dagger)(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at}) - (\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\frac{1}{2}(\imath \hat{F} + \imath \hat{F}^\dagger - \imath \hat{F} + \imath \hat{F}^\dagger) + \hat{F}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{F}^\dagger = \\ & \imath \frac{1}{2}[\hat{F} + \hat{F}^\dagger, \hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at}] - \frac{1}{2}\hat{F}^\dagger \hat{F}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at}) - \frac{1}{2}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{F}^\dagger \hat{F} + \hat{F}(\hat{\varrho}(t) \otimes \hat{\rho}_{at})\hat{F}^\dagger. \end{aligned}$$

Необходимо помнить, что операторы  $\hat{F}$  и  $\hat{F}^\dagger$  действуют в пространстве объединённой системы "мода+атом". Переход к операторам, действующим только в пространстве состояний моды, осуществляется взятием следа в (220). След удобно вычислять в базисе атомных состояний, диагонализующих оператор  $\hat{\rho}_{at}$ :

$$\hat{\rho}_{at} = \sum_k q_k |k\rangle \langle k|, \quad (223)$$

Получаем в итоге

$$\left( \frac{d}{dt} \hat{\varrho}(t) \right)_{irrev} = \imath \frac{\nu}{2} \sum_k q_k [\langle k | \hat{F} + \hat{F}^\dagger | k \rangle, \hat{\varrho}(t)] + \quad (224)$$

$$\nu \sum_{k,k'} q_k \langle k' | \hat{F} | k \rangle \hat{\varrho}(t) \langle k | \hat{F}^\dagger | k' \rangle - \frac{\nu}{2} \sum_{k,k'} q_k \{ \langle k | \hat{F}^\dagger | k' \rangle \langle k' | \hat{F} | k \rangle, \hat{\varrho}(t) \}$$

Здесь фигурными скобками обозначен антикоммутатор:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \doteq \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (225)$$

Первое слагаемое в правой части (224) вводит некоторую добавку  $\delta\hat{H}$  к гамильтониану полевой моды:

$$\delta\hat{H} \doteq -\frac{\nu}{2} \sum_k q_k \langle k | \hat{F} + \hat{F}^\dagger | k \rangle. \quad (226)$$

Остальные слагаемые невозможно привести к виду коммутатора с некоторым оператором. Они, следовательно, отвечают за принципиально необратимую эволюцию. Введём операторы

$$\hat{L}_{kk'} \doteq \sqrt{\nu q_k} \langle k' | \hat{F} | k \rangle. \quad (227)$$

Тогда последние три слагаемых в можно представить в виде так называемой структуры Линдблада:

$$\sum_{k,k'} \left( \hat{L}_{kk'} \hat{\varrho}(t) \hat{L}_{kk'}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{kk'}^\dagger \hat{L}_{kk'}, \hat{\varrho}(t) \} \right). \quad (228)$$

Структуры такого рода являются настолько же общими для описания необратимой эволюции, насколько общим является первое слагаемое правой части (215) при описании эволюции обратимой.

Мы будем далее рассматривать ситуацию конечного, но малого значения параметра  $\Omega_0\tau$ . В этом случае можно с хорошей точностью полагать, что

$$\hat{F} \simeq -\Omega_0\tau(\hat{s}_+\hat{a} + \hat{s}_-\hat{a}^\dagger). \quad (229)$$

и, следовательно,

$$\hat{L}_{kk'} = -\sqrt{\nu q_k} \Omega_0\tau \left( \langle k' | \hat{s}_+ | k \rangle \hat{a} + \langle k' | \hat{s}_- | k \rangle \hat{a}^\dagger \right). \quad (230)$$

Операторы Линдблада (230) оказываются некоторой линейной комбинацией операторов рождения и уничтожения кван-



тов в моде. Из структуры видно, что, если оператор  $\hat{\rho}_{at}$  диагонален в базисе  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , т.е.

$$\hat{\rho}_{at} = q_e |e\rangle\langle e| + q_g |g\rangle\langle g|, \quad (231)$$

в этой комбинации присутствует только одно слагаемое:

$$\hat{L}_{eg} = -\sqrt{\nu q_e} \Omega_0 \tau \hat{a}^\dagger, \quad \hat{L}_{ge} = -\sqrt{\nu q_g} \Omega_0 \tau \hat{a}. \quad (232)$$

Добавка  $\delta \hat{H}$  к гамильтониану в этом случае обращается в нуль, и квантовое кинетическое уравнение (215) для  $\hat{\rho}(t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = & -i\omega_0 [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \\ & \nu q_e \left( \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{a} - \frac{1}{2} \{ \hat{a} \hat{a}^\dagger, \hat{\rho} \} \right) + \nu q_g \left( \hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho} \} \right). \end{aligned} \quad (233)$$

Первая из двух структур Линдблада обусловлена отличием от нуля вероятности  $q_e$  нахождения влетающего атома в возбуждённом состоянии. Такой атом может только отдать свою энергию моде. Аналогичным образом вторая структура Линдблада в (233) пропорциональна  $q_g$  и описывает передачу энергии от моды атому.

Далее мы найдём точное решение уравнения (233), но сейчас поучительно рассмотреть его стационарное решение. Эволюция вероятностей  $p_t(n) \doteq \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle$  иметь  $n$  фотонов в моде подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt} p_t(n) = \nu q_e \left( n p_t(n-1) - (n+1) p_t(n) \right) + \nu q_g \left( (n+1) p_t(n+1) - n p_t(n) \right), \quad (234)$$

которое есть прямое следствие (233), если последнее рассмотреть для диагональных по  $n$  элементов матрицы плотности. Уравнение (234) является простым уравнением баланса для

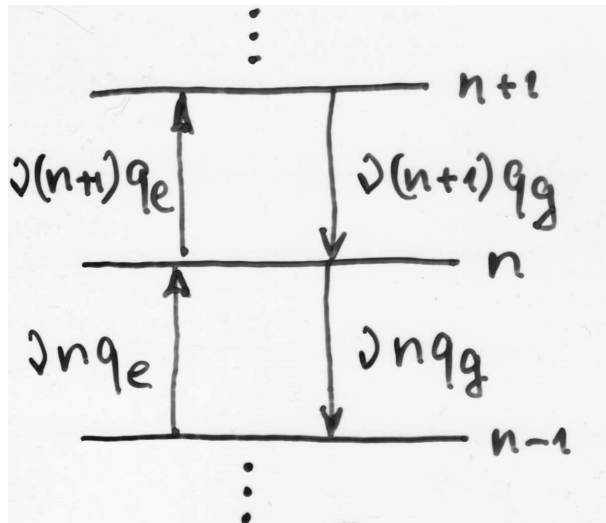


Рис. 16.

вероятностей  $p_t(n)$ . На рис.16 показаны три соседних энергетических уровня квантованной моды и переходы между ними, вызванные взаимодействием с пролетающими атомами. Первой скобке в правой части (234) отвечают стрелки, направленные вверх, а второй – стрелки, направленные вниз. Показаны также скорости переходов. В равновесном состоянии (если оно есть у системы!) числа встречных переходов в единицу времени между любой парой уровней должны быть одинаковы. Это так называемое соотношение детального баланса. Для уровней  $n$  и  $n + 1$  имеем, следовательно,

$$q_e p^{(eq)}(n) = q_g p^{(eq)}(n + 1). \quad (235)$$

Отсюда получаем

$$p^{(eq)}(n) = \left(\frac{q_e}{q_g}\right)^n p^{(eq)}(0). \quad (236)$$

В случае

$$q_e < q_g \quad (237)$$

это сходящееся степенное тепловое распределение (151). Атомы "навязывают" моде свою температуру через параметр  $q_e/q_g$ . В случае  $q_e \geq q_g$  равновесного распределения нет, т.к. мода постоянно приобретает энергию от пролетающих атомов.

Уравнение (234) описывает эволюцию диагональных элементов матрицы плотности полевой моды в базисе Фока. Нетрудно проверить, что недиагональные элементы эволюционируют независимо от диагональных. При этом кинетика связывает эволюцию  $\langle n_1 | \hat{\rho}(t) | n_2 \rangle$  и  $\langle n_1 \pm 1 | \hat{\rho}(t) | n_2 \pm 1 \rangle$ . Стационарным равновесным решением (оно существует при  $q_e < q_g$ ) для недиагональных элементов является нулевое. Поэтому

$$\hat{\rho}^{(eq)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(eq)}(n) |n\rangle \langle n|. \quad (238)$$

## 9 Лекция 9

### Решение квантового кинетического уравнения.

Найдём общее решение уравнения (233) при произвольных начальных условиях. При этом будем считать выполненным условие (237). Уравнение операторное. Методы решения дифференциальных операторных уравнений не столь развиты, как методы решения дифференциальных уравнений для числовых функций. Поэтому целесообразно попытаться преобразовать уравнение (233) в уравнение с частными производными для глауберовской  $P$ -функции, как представителя статистического оператора. Мы видим, что в (233) встречаются разные комбинации операторов рождения и уничтожения квантов, стоящие слева и справа от  $\hat{\rho}(t)$ . Комбинация  $\hat{a}\hat{\rho}(t)$  на языке  $P$ -функции сводится, как легко понять, к умножению последней на  $\alpha$ :  $P_t(\alpha, \alpha^*) \mapsto \alpha P_t(\alpha, \alpha^*)$ . Аналогично правое умножение на  $\hat{a}^\dagger$ , т.е.  $\hat{\rho}(t) \mapsto \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger$  сводится к замене  $P_t(\alpha, \alpha^*) \mapsto \alpha^* P_t(\alpha, \alpha^*)$ . Ситуация с комбинациями  $\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)$  и  $\hat{\rho}(t)\hat{a}$  сложнее. Рассмотрим первую из них. Перепишем выражение (204) в следующем виде

$$\hat{\rho}(t) = \int P_t(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} ||\alpha\rangle\langle\alpha|| d^2\alpha, \quad (239)$$

где

$$||\alpha\rangle \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (240)$$

есть так называемое состояние Баргмана. Оно отличается от обычного когерентного состояния Глаубера отсутствием нормировочного множителя. Но за счёт этого оно оказывается голоморфной функцией параметра  $\alpha$  (не зависит от  $\alpha^*$ ). Имеем

$$\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t) = \int P_t(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} \hat{a}^\dagger ||\alpha\rangle\langle\alpha|| d^2\alpha, \quad (241)$$

Из определения (240) следует

$$\hat{a}^\dagger ||\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} ||\alpha\rangle. \quad (242)$$

Поскольку  $\langle \alpha ||$  есть функция только от  $\alpha^*$ , мы можем переписать правую часть (241):

$$\hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) = \int P_t(\alpha, \alpha^*) e^{-|\alpha|^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (||\alpha\rangle \langle \alpha||) d^2 \alpha. \quad (243)$$

Осуществим интегрирование по частям, предполагая, что на бесконечности  $\alpha$ -плоскости  $P$ -функция Глаубера стремится к нулю. Возвращаясь к обычным когерентным состояниям, получаем в итоге

$$\hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) = \int \left[ \left( \alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) P_t(\alpha, \alpha^*) \right] |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha. \quad (244)$$

Аналогичным образом убеждаемся, что  $\hat{\rho}(t) \mapsto \hat{\rho}(t) \hat{a}$  сводится к замене

$$P_t(\alpha, \alpha^*) \mapsto \left( \alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) P_t(\alpha, \alpha^*). \quad (245)$$

Мы имеем все необходимые инструменты для перехода от (233) к кинетическому уравнению для  $P_t(\alpha, \alpha^*)$ . Целесообразно, однако, упростить уравнение (233), устранив неинтересную собственную динамику моды. Этот приём, аналогичный переходу к представлению взаимодействия, у нас уже использовался. Мы будем рассматривать уравнение для нового (штрихованного) статистического оператора  $\hat{\rho}'(t)$ , связанного со старым соотношением

$$\hat{\rho}(t) = \exp[-i\hat{H}_0 t] \hat{\rho}'(t) \exp[i\hat{H}_0 t]. \quad (246)$$

При этом преобразовании операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  также изменятся:  $\hat{a} \mapsto \exp[i\hat{H}_0 t]\hat{a}\exp[-i\hat{H}_0 t] = \exp[-i\omega_0 t]\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger \mapsto \exp[i\hat{H}_0 t]\hat{a}^\dagger\exp[-i\hat{H}_0 t] = \exp[i\omega_0 t]\hat{a}^\dagger$ , но, поскольку они входят во все члены попарно, множители  $\exp[\pm i\omega_0 t]$  везде сокращаются. Таким образом, мы исходим из уравнения

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}'(t) = \gamma\langle n \rangle \left( \hat{a}^\dagger \hat{\rho}'(t) \hat{a} - \frac{1}{2} \{ \hat{a} \hat{a}^\dagger, \hat{\rho}' \} \right) + \gamma(\langle n \rangle + 1) \left( \hat{a} \hat{\rho}'(t) \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}' \} \right). \quad (247)$$

Для удобства мы преобразовали параметры, введя  $\langle n \rangle$  – среднее равновесное число квантов согласно (151) и (236):

$$\frac{q_e}{q_g} = \frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1}. \quad (248)$$

Новая константа скорости определяется соотношением

$$\gamma\langle n \rangle \doteq \nu q_e. \quad (249)$$

Группируя слагаемые разного типа, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_t(\alpha, \alpha^*) = \gamma \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \langle n \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right) P'_t(\alpha, \alpha^*). \quad (250)$$

Уже на этом этапе в нём легко узнать уравнение типа Фоккера-Планка. Для дальнейшего удобно перейти от переменных  $\alpha$  и  $\alpha^*$  к действительной и мнимой частям  $\alpha$  ( $\alpha = x + iy$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_t(x, y) = \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y \right) P'_t(x, y) + \frac{1}{4} \gamma \langle n \rangle \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P'_t(x, y). \quad (251)$$

Выберем начальные условия

$$P'_0(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (252)$$

факторизующие глауберовскую  $P$ -функцию в начальный момент времени. Структура уравнения (226) обеспечивает факторизованность решения при всех моментах времени, т.е.

$$P'_t(x, y) = p(x, t|x_0, 0)p(y, t|y_0, 0), \quad (253)$$

где введённая условная вероятность  $p(x, t|x_0, 0)$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x_0, 0) = \left( \frac{1}{2}\gamma \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{1}{4}\gamma \langle n \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p(x, t|x_0, 0) \quad (254)$$

при начальных условиях

$$p(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0). \quad (255)$$

Аналогичному уравнению и начальному условию подчиняется  $p(y, t|y_0, 0)$ .

Для решения уравнения (254) перейдём к характеристической функции (Фурье-образу от распределения вероятности)

$$\phi(s, t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t|x_0, 0)e^{isx} dx. \quad (256)$$

Уравнение для этой функции имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(s, t) = - \left( \frac{1}{2}\gamma s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{4}\gamma \langle n \rangle s^2 \right) \phi(s, t), \quad (257)$$

а начальные условия

$$\phi(s, 0) = e^{isx_0}. \quad (258)$$

Смысл перехода от (254) к (257) в том, что последнее уравнение содержит только первые производные. Введём новые переменные

$$\xi = se^{\gamma t/2}, \quad \eta = se^{-\gamma t/2}. \quad (259)$$

Уравнение (257), переписанное для функции  $\tilde{\phi}(\xi, \eta) = \phi(s, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\phi}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \langle n \rangle \xi \tilde{\phi}(\xi, \eta). \quad (260)$$

Его общее решение имеет вид

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = \exp \left[ -\frac{1}{4} \langle n \rangle \xi \eta + f(\eta) \right], \quad (261)$$

где  $f(\eta)$  – произвольная функция. Мы выберем её так, чтобы удовлетворить начальному условию (258). Должно быть при  $t = 0$

$$-\frac{1}{4} \langle n \rangle s^2 + f(s) = ix_0. \quad (262)$$

Следовательно,

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = \exp \left[ -\frac{1}{4} \langle n \rangle \eta (\xi - \eta) + ix_0 \eta \right]. \quad (263)$$

Возвращаемся к переменным  $s$  и  $t$ :

$$\phi(s, t) = \exp \left[ -\frac{1}{4} \langle n \rangle s^2 \left( 1 - e^{-\gamma t} \right) + ix_0 s e^{-\gamma t/2} \right]. \quad (264)$$

Преобразование Фурье, обратное к (256), даёт искомое решение:

$$p(x, t | x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi \langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]}} \exp \left[ -\frac{[x - x_0 \exp(-\gamma t/2)]^2}{\langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]} \right]. \quad (265)$$

Для функции (253) имеем

$$P'_t(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]} \exp \left[ -\frac{|\alpha - \alpha_0 \exp(-\gamma t/2)|^2}{\langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]} \right]. \quad (266)$$



Теперь необходимо вспомнить о сделанном переходе (246) и осуществить обратное преобразование:

$$\begin{aligned} & \int P_t(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \\ & \int P'_t(\alpha, \alpha^*) \exp(-i\hat{H}_0 t) |\alpha\rangle \langle \alpha| \exp(i\hat{H}_0 t) d^2\alpha = \quad (267) \\ & = \int P'_t(\alpha, \alpha^*) |\alpha \exp(-i\omega_0 t)\rangle \langle \alpha \exp(-i\omega_0 t)| d^2\alpha \end{aligned}$$

Из этого равенства получаем

$$P_t(\alpha, \alpha^*) = P'_t(\alpha \exp[i\omega_0 t], \alpha^* \exp[-i\omega_0 t]). \quad (268)$$

В итоге имеем для  $P$ -функции, которую мы с учётом начальных условий обозначим как условную (квази)вероятность:

$$\begin{aligned} P_t(\alpha, \alpha^*) & \doteq p(\alpha, t | \alpha_0, 0) = \\ & \frac{1}{\pi \langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]} \exp \left[ - \frac{|\alpha - \alpha_0 \exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t)|^2}{\langle n \rangle [1 - \exp(-\gamma t)]} \right]. \end{aligned} \quad (269)$$

Мы видим, что эта функция всюду неотрицательна и поэтому может трактоваться как классическое распределение вероятности. Изначальное сингулярное распределение, сосредоточенное в точке  $\alpha_0$ , расплывается в ходе эволюции. Причём его максимум двигается по сходящейся спирали вокруг центра  $\alpha$ -плоскости. При больших временах распределение стремится к

$$p(\alpha, \infty | \alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp \left( - \frac{|\alpha|^2}{\langle n \rangle} \right) \quad (270)$$

– гауссову распределению. Это  $P$ -функция равновесного состояния (238).

Мы получили решение кинетического уравнения для выбранных начальных условий

$$P_0(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0). \quad (271)$$

Видно, однако, что это позволяет найти  $P$ -функцию для любых начальных условий. Действительно

$$P_t(\alpha, \alpha^*) = \int p(\alpha, t | \alpha_0, 0) P_0(\alpha_0, \alpha_0^*) d^2 \alpha_0 \quad (272)$$

удовлетворяет кинетическому уравнению и начальным условиям, заключённым в  $P_0(\alpha, \alpha^*)$ .

**Вычисление корреляционных функций.** Знание условного распределения вероятности (269) не только для конкретной рассматриваемой модели релаксации, но и для общих процессов кинетики квантовой моды позволяет вычислять различные корреляционные функции. Действительно, на языке  $P$ -функций амплитуда выступает как случайная величина. Пусть требуется вычислить корреляционную функцию  $\langle \alpha^*(\tau) \alpha(0) \rangle^{(st)}$  в стационарном состоянии, когда все переходные процессы уже завершились. Рассмотрим выражение

$$\int \left( \int \alpha^* p(\alpha, \tau | \alpha_0, 0) d^2 \alpha \right) \alpha_0 P^{(st)}(\alpha_0, \alpha_0^*) d^2 \alpha_0. \quad (273)$$

Внутренний интеграл в круглых скобках есть среднее значение  $\alpha^*$  в момент времени  $\tau$  при условии "старта" из точки  $\alpha_0$  в нулевой момент времени. Внешний интеграл есть усреднение по точкам "старта" в стационарных условиях. Распределение  $P^{(st)}(\alpha_0, \alpha_0^*)$  получается из  $p(\alpha, t | \alpha_0, 0)$  переходом к пределу  $t \rightarrow \infty$ . Мы видим, что (273) по сути ни что иное как корреляционная функция комплексных амплитуд

$\langle \alpha^*(\tau)\alpha(0) \rangle^{(st)}$ . Аналогичным образом вычисляется корреляционная функция интенсивностей

$$\langle |\alpha(\tau)|^2 |\alpha(0)|^2 \rangle^{(st)} = \int \int |\alpha|^2 |\alpha_0|^2 p(\alpha, \tau | \alpha_0, 0) P^{(st)}(\alpha_0, \alpha_0^*) d^2 \alpha d^2 \alpha_0. \quad (274)$$

Для условного распределения (269) имеем

$$\langle \alpha^*(\tau)\alpha(0) \rangle^{(st)} = \langle n \rangle \exp \left[ - \left( \frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) \tau \right] \quad (275)$$

и

$$\langle |\alpha(\tau)|^2 |\alpha(0)|^2 \rangle^{(st)} = \langle n \rangle^2 \left( 1 + e^{-\gamma\tau} \right). \quad (276)$$

Эти соотношения понадобятся нам далее.

## 10 Лекция 10

**Квантовая модель лазера.** Кинетические уравнения (233) и выведенное из него оказываются адекватными для нелазерной ситуации, когда  $q_e < q_g$ , т.е. влетающие атомы не обладают инверсией населённости. Именно инверсия, как известно, является условием возникновения лазерной генерации.

Можно попробовать модифицировать уравнение (250) так, чтобы оно описывало генерацию. Рассмотрим с этой целью поведение средней интенсивности

$$\langle |\alpha|^2 \rangle_t \doteq \int |\alpha|^2 P_t(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (277)$$

Из кинетического уравнения (250) для  $P_t(\alpha, \alpha^*)$  легко получаем<sup>6</sup>

$$\frac{d}{dt} \langle |\alpha|^2 \rangle_t = -\gamma \langle |\alpha|^2 \rangle_t + \gamma \langle n \rangle. \quad (278)$$

Первое слагаемое в правой части возникает из сносового слагаемого в (250), содержащего первые производные. Видно, что сносовой член порождает затухание интенсивности на фоне постоянного источника, связанного с диффузионным слагаемым в (250). Если просто поменять знак у сносового слагаемого, мы придём к нефизическому результату – неограниченному экспоненциальному росту интенсивности. В лазере такого не происходит, т.к. *линейное усиление* интенсивности должно уравновесится *нелинейным затуханием*. Надо понять, как это происходит и как правильно модифицировать сносовые слагаемые в кинетическом уравнении.

---

<sup>6</sup>Наличие или отсутствие динамического члена в кинетическом уравнении не сказывается на виде выражения (278).

Воспользуемся простейшей так называемой скоростной моделью лазера. Она включает в себя числа  $N_g$  и  $N_e$  атомов в основном и возбуждённом состояниях и число фотонов  $n$ . Считается, что можно рассматривать эти числа как непрерывные действительные переменные, подчиняющиеся обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{N}_g &= w_{ge}N_e - w_{eg}N_g + B \cdot n(N_e - N_g), \\ \dot{N}_e &= w_{eg}N_g - w_{ge}N_e - B \cdot n(N_e - N_g), \\ \dot{n} &= B \cdot n(N_e - N_g) - \nu n.\end{aligned}\quad (279)$$

Закон сохранения числа атомов  $N_e + N_g = N$  делает достаточным рассмотрение только одного из первых двух уравнений. Скорости  $w_{eg}$  и  $w_{ge}$  переходов между уровнями феноменологически описывают механизм создания инверсии населённости. В этот механизм не включены вынужденные радиационные переходы, скорость которых задаётся коэффициентом Эйнштейна  $B$ . Скорость  $\nu$  описывает уход фотонов из лазера.

Несмотря на простоту скоростной модели, точного решения системы не найдено. Мы воспользуемся приближённым решением в ситуации, когда атомная подсистема является более быстрой в сравнении с фотонной. В этом случае величины  $N_e$  и  $N_g$  успевают подстроиться к имеющемуся в данный момент числу фотонов. Определяя  $N_e$  и  $N_g$  из условия  $\dot{N}_e = 0 = \dot{N}_g$  и подставляя полученные значения в уравнение для  $n$ , получаем

$$\dot{n} = -\nu n + \frac{B \cdot n(w_{eg} - w_{ge})N}{w_{eg} + w_{ge} + 2B \cdot n}.\quad (280)$$

Удобно ввести значение стационарной инверсии населённости в отсутствие фотонов:

$$\Delta N^{(0)} \doteq \frac{w_{eg} - w_{ge}}{w_{eg} + w_{ge}} N.\quad (281)$$

При  $\Delta N^{(0)} < \nu/B$  единственное физически разумное стационарное число фотонов есть  $n_{st} = 0$ . При  $\Delta N^{(0)} > \nu/B$  помимо нулевого решения появляется также

$$n_{st} = \frac{w_{eg} + w_{ge}}{2\nu} \left( \Delta N^{(0)} - \frac{\nu}{B} \right). \quad (282)$$

Нулевое решение оказывается при этом неустойчивым, как следует из линеаризованного при малых  $n$  уравнения (280). Точка  $\Delta N^{(0)} = \nu/B$  является порогом генерации (см. рис.17) Если мы не очень далеко ушли от порога, т.е. если  $n_{st}$  из (282)

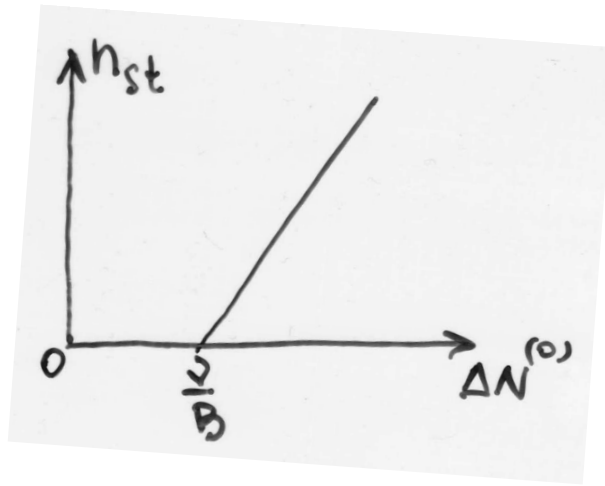


Рис. 17.

мало по сравнению с  $(w_{eg} + w_{ge})/B$ , можно преобразовать (280), удерживая первые нелинейные поправки по  $n$ :

$$\dot{n} = (B\Delta N^{(0)} - \nu)n - \frac{2B^2\Delta N^{(0)}}{w_{eg} + w_{ge}}n^2. \quad (283)$$

Первое слагаемое в правой части описывает линейное усиление, а второе – нелинейные потери. Если считать, что  $n = \langle |\alpha|^2 \rangle$ ,  $n^2 = \langle |\alpha|^4 \rangle$  и что правая часть уравнения порождается некоторым сносовым слагаемым в уравнении типа Фоккера-Планка, то структура этого слагаемого легко угадывается:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\alpha) = -b \operatorname{div}_\alpha [(d - r^2) \alpha P_t(\alpha)] + q \Delta_\alpha P_t(\alpha). \quad (284)$$

Здесь от комплексного числа  $\alpha = r \exp(i\varphi)$  осуществлён переход к геометрии на плоскости;  $\alpha = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$ . Произведение  $bd$  есть скорость линейного усиления, так что  $d < 0$  ниже порога и  $d > 0$  выше порога генерации;  $b$  есть скорость нелинейного затухания. Феноменологический коэффициент  $q$  отвечает за флуктуации. Мы считаем, что для их описания достаточно, как и в случае (250), диффузионного слагаемого.

Перепишем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_t(\alpha) = & -b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(d - r^2) r^2 P_t(\alpha)] + \\ & q \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] P_t(\alpha). \end{aligned} \quad (285)$$

и рассмотрим его стационарное решение. Диффузия по углу  $\varphi$  (фазе амплитуды) должна завершиться в стационарном состоянии. Следовательно, стационарное решение  $P^{(st)}(\alpha)$  зависит только от  $r$ . Имеем для этой функции соотношение

$$b \frac{d}{dr} [(d - r^2) r^2 P^{(st)}(r)] = q \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} P^{(st)}(r) \right], \quad (286)$$

откуда получаем

$$P^{(st)}(r) \propto \exp \left[ \frac{bdr^2}{2q} - \frac{br^4}{4q} \right]. \quad (287)$$

Экстремум этой функции (кроме  $r = 0$ ) лежит при  $d > 0$  в точке  $r_{max} = \sqrt{d}$ . Это точка максимума. В режиме развитой генерации представим  $r = \sqrt{d} + \varepsilon$  и удержим в показателе из (287) только квадратные по  $\varepsilon$  слагаемые (линейные по  $\varepsilon$  члены, естественно, сокращаются):

$$P^{(st)}(\sqrt{d} + \varepsilon) \propto \exp \left[ -\frac{bd\varepsilon^2}{q} \right]. \quad (288)$$

Видно, что профиль стационарного распределения гауссов с шириной  $\sqrt{q/bd}$ . В случае  $r_{max} \gg \sqrt{q/bd}$ , т.е. при  $d \gg \sqrt{q/b}$  приближённое выражение (288) становится близким к точному.

Проанализируем простейшие черты эволюции распределения  $P_t(\alpha)$ . Рассмотрим сначала режим много ниже порога, т.е.  $d < 0$ ,  $|d| \gg 1$ . В этом случае в уравнении (284) можно пренебречь нелинейным затуханием на фоне линейного:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\alpha) = b|d| \operatorname{div}_\alpha [\alpha P_t(\alpha)] + q\Delta_\alpha P_t(\alpha). \quad (289)$$

Полученное уравнение отличается от (250) только формой записи. Отождествляя параметры обоих уравнений и пользуясь (270) и (271), получаем

$$\langle \alpha^*(\tau)\alpha(0) \rangle^{(st)} = \frac{2q}{b|d|} e^{-b|d|\tau} \quad (290)$$

и

$$\langle |\alpha(\tau)|^2 |\alpha(0)|^2 \rangle^{(st)} = \left( \frac{2q}{b|d|} \right)^2 \left( 1 + e^{-2b|d|\tau} \right). \quad (291)$$

Теперь рассмотрим режим развитой генерации  $d \gg \sqrt{q/b}$ . Представим, как и ранее,  $r = \sqrt{d} + \varepsilon$ . Решение для условного распределения факторизуется:

$$P(\alpha, \tau | \alpha_0, 0) = R(\varepsilon, \tau | \varepsilon_0, 0) \Phi(\varphi, \tau | \varphi_0, 0). \quad (292)$$



Чтобы убедиться в этом, оставим в кинетическом уравнении (292) минимальные необходимые степени  $\varepsilon$  на фоне  $\sqrt{d}$ , т.е. оставим  $\varepsilon$  только в комбинации  $d - r^2 \simeq -2\sqrt{d}\varepsilon$  из (286). Получаем в итоге уравнения для функций  $R$  и  $\Phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} R(\varepsilon, t|\varepsilon_0, 0) = \left( 2bd \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon + q \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \right) R(\varepsilon, t|\varepsilon_0, 0) \quad (293)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\varphi, t|\varphi_0, 0) = \frac{q}{d} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi, t|\varphi_0, 0). \quad (294)$$

Решение последнего

$$\Phi(\varphi, \tau|\varphi_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_0) - m^2 q \tau / d]. \quad (295)$$

важно для вычисления корреляционной функции амплитуды:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^*(\tau) \alpha(0) \rangle^{(st)} &= \langle [\sqrt{d} + \varepsilon(\tau)] [\sqrt{d} + \varepsilon(0)] \rangle^{(st)} \langle e^{-i\varphi(\tau)} e^{i\varphi(0)} \rangle^{(st)} \simeq \\ &\simeq (d + \langle \varepsilon(\tau) \varepsilon(0) \rangle^{(st)}) \exp(-q\tau/d). \end{aligned} \quad (296)$$

Для вычисления корреляционной функции интенсивности достаточно уравнения (293):

$$\begin{aligned} \langle |\alpha(\tau)|^2 |\alpha(0)|^2 \rangle^{(st)} &= \langle [\sqrt{d} + \varepsilon(\tau)]^2 [\sqrt{d} + \varepsilon(0)]^2 \rangle^{(st)} \langle \simeq \\ &\simeq d^2 + 2d \langle \varepsilon^2 \rangle^{(st)} + 4d \langle \varepsilon(\tau) \varepsilon(0) \rangle^{(st)} = d^2 + \frac{q}{b} + \frac{2q}{b} \exp(-2bd\tau) \end{aligned} \quad (297)$$

В последнем выражении отброшено малое слагаемое  $\langle \varepsilon^2(\tau) \varepsilon^2(0) \rangle^{(st)}$ . Сравним скорости затухания в корреляционных функциях (290), (291), (296) и (297). Мы вычислили их асимптотики много ниже и много выше порога. Результаты

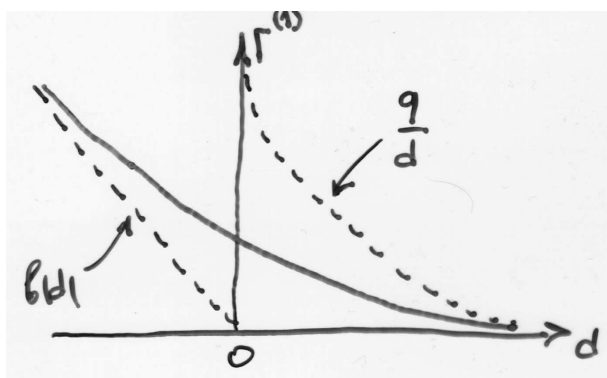


Рис. 18.

интерполяции для константы затухания  $\Gamma^{(1)}$  корреляционной функции амплитуды представлена на рис. 18). Имеет место снижение  $\Gamma^{(1)}$  с ростом  $d$  – явление сужения ширины линии генерации лазера. Интерполяция для константы  $\Gamma^{(2)}$  релаксации корреляций интенсивности представлена на рис. 19). Видно, что вблизи порога генерации флуктуации интенсивности становятся долгоживущими. Это свидетельствует о родстве явления порога генерации с фазовым переходом 2-го рода, где флуктуации в точке перехода становятся крупномасштабными в пространстве и времени.

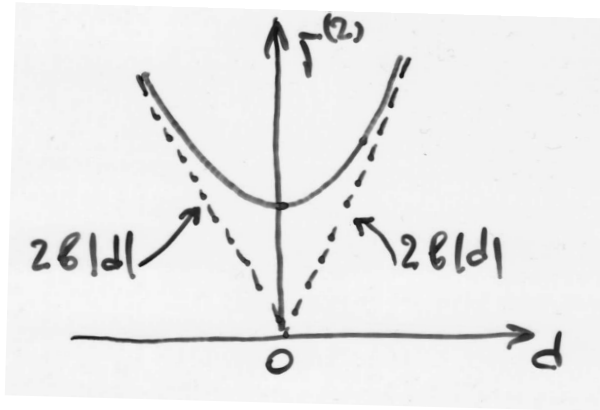


Рис. 19.

## 11 Лекция 11

**Модель Джейнса-Каммингса** – одна из важнейших базовых моделей квантовой оптики является нашим предметом в этой лекции. Рассматривается система, состоящая из двухуровневого атома и гармонической квантованной моды, взаимодействующих в дипольном резонансном приближении. Таким образом, гамильтониан этой модели, известный как гамильтониан Джейнса-Каммингса, имеет вид

$$\hat{H}_{JC} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 |e\rangle \langle e| + \Omega_0 (\hat{a} |e\rangle \langle g| + \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e|) \quad (298)$$

Здесь  $\omega$  – частота моды,  $\omega_0$  – частота перехода атома,  $\Omega_0$  – константа размерности частоты, задающая эффективность взаимодействия атома и излучения.

Отдельные элементы гамильтониана (298) у нас уже использовались ранее. Теперь мы подробно исследуем  $\hat{H}_{JC}$ , найдём собственные состояния, собственные значения и рассмотрим весьма любопытные свойства эволюции системы

атома и моды. Ценность в том, что это фактически единственный гамильтониан квантовой электродинамики (нерелятивистской), допускающий точное аналитическое исследование.

Если  $\Omega_0 = 0$ , т.е. атом не взаимодействует с фотонами моды, собственными состояниями являются вектора  $|e, n\rangle$  и  $|g, n\rangle$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – число фотонов. Включение взаимодействия инициирует переходы внутри пар<sup>7</sup>  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ . Каждая такая пара нумеруется числом  $n$ . Собственные состояния оператора  $\hat{H}_{JC}$  при  $\Omega_0 \neq 0$  также должны группироваться в пары  $\{|1(n)\rangle, |2(n)\rangle\}$ , нумеруемые  $n$ , и вектора  $|1(n)\rangle$  и  $|2(n)\rangle$  должны быть ортонормированными суперпозициями векторов  $|e, n\rangle$  и  $|g, n+1\rangle$ . Заметим, что в (298) отсутствуют комплексные параметры. Из этого можно заключить, что коэффициенты суперпозиций должны быть действительны. Переход от пары  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$  к паре  $\{|1(n)\rangle, |2(n)\rangle\}$  можно поэтому представить как поворот в двумерном гильбертовом подпространстве на некоторый угол  $\Theta_n$ :

$$\begin{aligned} |1(n)\rangle &= \cos \Theta_n |e, n\rangle + \sin \Theta_n |g, n+1\rangle, \\ |2(n)\rangle &= -\sin \Theta_n |e, n\rangle + \cos \Theta_n |g, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (299)$$

Состояния  $|1(n)\rangle$  и  $|2(n)\rangle$  называют "одетыми" состояниями (dressed states) атома в отличие от состояний  $|e\rangle$  и  $|g\rangle$  "голого" атома. Предлагается картина атома, одетого полем. Найдём  $\cos \Theta_n$  и  $\sin \Theta_n$  одновременно с энергиями состояний (300), решая уравнения

$$\hat{H}_{JC}|1(n)\rangle = E_1(n)|1(n)\rangle, \quad \hat{H}_{JC}|2(n)\rangle = E_2(n)|2(n)\rangle. \quad (300)$$

Для определённости будем считать, что  $E_1(n) > E_2(n)$ . Простое упражнение из начального курса квантовой механики

---

<sup>7</sup>Состояние  $|g, 0\rangle$  не имеет пары и является основным состоянием:  $\hat{H}_{JC}|g, 0\rangle = 0$ .

даёт следующие значения энергий:

$$E_{1,2}(n) = (n+1)\omega + \frac{1}{2}\Delta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)}, \quad (301)$$

где  $\Delta$  – расстройка частот атома и моды. На рис. 20 представлена структура уровней системы "атом+мода" при

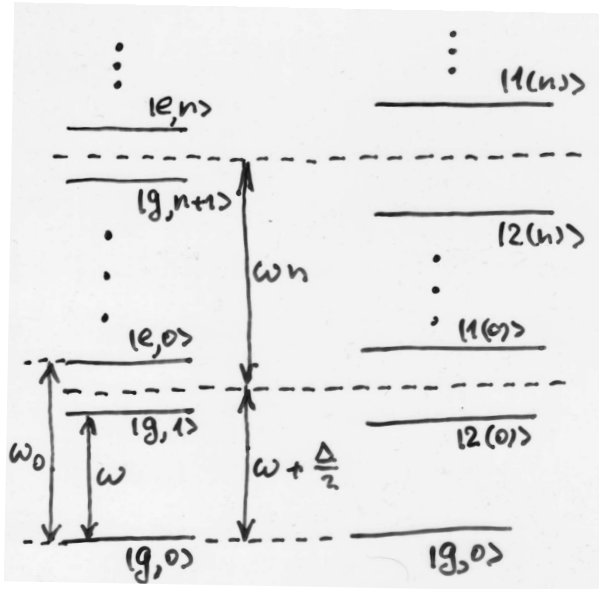


Рис. 20.

$\Delta > 0$  для случая  $\Omega_0 = 0$  (слева) и  $\Omega_0 \neq 0$  (справа). Центры тяжести пар уровней расположены в точках  $(n+1)\omega + \frac{1}{2}\Delta$  и не меняют своего положения при включении взаимодействия. В случае расстояние между уровнями  $E_1(n)$  и  $E_2(n)$  увеличивается с увеличением  $n$ , и структура уровней оказывается

непериодичной. Для амплитуд суперпозиции получаем

$$\begin{aligned}\cos \Theta_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)}}{\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1) + \Delta\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)}}} \quad (302) \\ \sin \Theta_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\Omega_0\sqrt{n+1}}{\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1) + \Delta\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)}}}.\end{aligned}$$

При  $\Omega_0 \rightarrow 0$  имеем  $\cos \Theta_n \rightarrow 1$ ,  $\sin \Theta_n \rightarrow 0$ , как и следовало ожидать. Мы имеем изящный вид соотношения на угол  $2\Theta_n$ :

$$\tan(2\Theta_n) = \frac{2\Omega_0\sqrt{n+1}}{\Delta}. \quad (303)$$

**Коллапс и восстановление осцилляций.** В точном резонансе  $\Delta = 0$  выражения для временной эволюции наиболее компактны. Поэтому рассмотрим именно этот случай. Пусть при  $t = 0$  приготовлено состояние

$$|\Psi_0\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle, \quad (304)$$

т.е. атом находится в возбуждённом состоянии, а мода – в когерентном состоянии. Вычислим

$$|\Psi_t\rangle = \exp(-i\hat{H}_{JC}t)|\Psi_0\rangle. \quad (305)$$

Одетые состояния в точном резонансе образованы поворотом на угол  $\Theta_n = \pi/4$ . Следовательно,

$$|e, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1(n)\rangle - |2(n)\rangle \right). \quad (306)$$

Энергии одетых состояний при  $\Delta = 0$

$$E_{1,2}(n) = (n+1)\omega \pm \Omega_0\sqrt{n+1}, \quad (307)$$

Результат простого вычисления  $|\Psi_t\rangle$  из (305) даёт

$$|\Psi_t\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega t} \left[ \cos(\Omega_0 \sqrt{n+1}t) |e, n\rangle - \right. \\ \left. i \sin(\Omega_0 \sqrt{n+1}t) |g, n+1\rangle \right]. \quad (308)$$

Осциллирующие слагаемые ответственны за так называемые рабиевские колебания. Рассмотрим вероятность обнаружить атом в возбуждённом состоянии в момент  $t$ :

$$p_e(t) = \text{Tr}_{ph} \langle e | \Psi_t \rangle \langle \Psi_t | e \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos^2(\Omega_0 \sqrt{n+1}t). \quad (309)$$

На рис. 21 представлена зависимость этой вероятности от

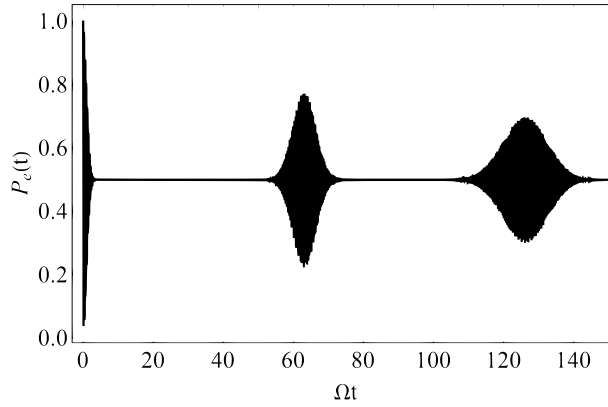


Рис. 21.

времени при  $|\alpha|^2 = 100$ . Из-за малого периода осцилляций их траектория не различима в масштабе рисунка. Видно, что

начальные рабиевские осцилляции претерпевают то что назвали 'коллапсом', после которого в течение длительного периода  $p_e(t) = 0.5$  с хорошей точностью.

Рассмотрим природу и оценим время коллапса  $T_{coll}$ . Как следует из (309),  $p_e(t)$  является суммой различных гармонических слагаемых, частоты которых пропорциональны  $\sqrt{n+1}$ . Веса этих слагаемых даются пуассоновским распределением. Центр этого распределения находится в точке  $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ , а ширина есть  $\sqrt{\langle n \rangle} = |\alpha|$ . Поэтому верна следующая оценка диапазона частот гармонических слагаемых в (309):

$$\Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}}. \quad (310)$$

Поскольку в нашем случае  $\sqrt{\langle n \rangle} \gg 1$ , мы можем провести в (310) разложение до первых степеней  $1/\sqrt{\langle n \rangle}$ , что даёт величину  $\Omega_0$ . Поэтому за время

$$T_{coll} \simeq \Omega_0^{-1} \quad (311)$$

происходит расфазировка рабиевских колебаний и наступает коллапс. Примечательно, что время коллапса не зависит от  $\langle n \rangle$  и определяется только параметром взаимодействия атома и моды. Это хорошо видно из рис. 22. Форма и время коллапса практически не изменились.

При некотором времени происходит возобновление (revival) рабиевских нутаций. Ясно, что это есть следствие сфазировки колебаний на различных дискретных частотах из (310). При  $\langle n \rangle \gg 1$ , как в нашем случае, основной вклад дают частоты вблизи  $\Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle}$ . Ближайшие соседние частоты  $\Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle} \pm 1$ . Расстояние между ними, вычисляемое разложением по  $1/\langle n \rangle$ , определяет порядок обратного времени фазировки:

$$T_{rev} \simeq \Omega_0^{-1} \sqrt{\langle n \rangle} \quad (312)$$



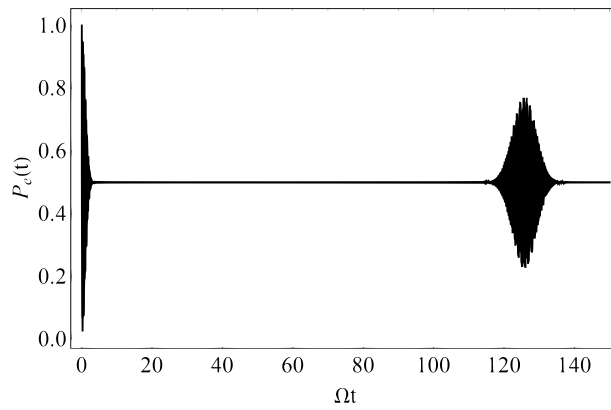


Рис. 22.

В отличие от  $T_{coll}$  это время уже зависит от среднего числа фотонов и растёт вместе с ним. Это видно из рис. 22. После нескольких всё менее чётких стадий коллапса и восстановления картина осцилляций приобретает нерегулярный характер и качественно уже не меняется.

## 12 Лекция 12

**Резонансная флуоресценция.** Спектр одетого атома существенно отличается от спектра голого атома и является своеобразным гибридом последнего со спектром гармонического осциллятора. Одетый атом наследует способность к спонтанным переходам. Рассмотрим их специфику, обусловленную особенностями спектра одетого атома. Спонтанные переходы в двухуровневом (голом) атоме являются необратимым процессом распада возбуждённого состояния  $|e\rangle$  (см. рис. 23) Для дальнейшего удобно представить процесс спон-

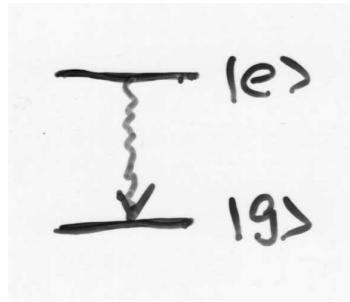


Рис. 23.

танного распада в виде соответствующей структуры Линдблада в кинетическом уравнении:

$$\left(\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right)_{spont} = \gamma|g\rangle\langle e|\hat{\rho}|e\rangle\langle g| - \frac{\gamma}{2}\{|e\rangle\langle e|, \hat{\rho}\} \quad (313)$$

Здесь  $\gamma$  – скорость спонтанного распада. Единственным оператором Линдблада является  $|g\rangle\langle e|$  – оператор, напрямую описывающий переход  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . Это понижающая часть оператора дипольного момента перехода между состояниями  $|e\rangle$

и  $|g\rangle$ . Мы можем руководствоваться этим соображением при определении картины спонтанных переходов в одетом атоме. Рассмотрим две соседние по энергии пары одетых состояний  $\{|1(n)\rangle, |2(n)\rangle\}$  и  $\{|1(n-1)\rangle, |2(n-1)\rangle\}$  (см. рис. 24) Легко

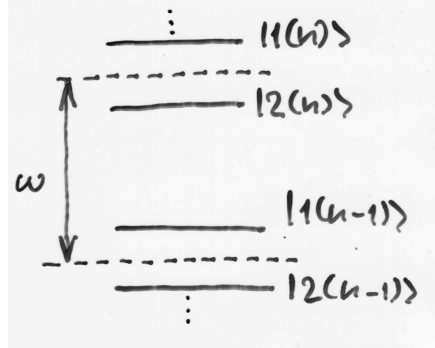


Рис. 24.

проверить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \langle 1(n-1)|g\rangle\langle e|1(n)\rangle &= \cos \Theta_n \sin \Theta_{n-1}, & (314) \\
 \langle 2(n-1)|g\rangle\langle e|2(n)\rangle &= -\sin \Theta_n \cos \Theta_{n-1}, \\
 \langle 2(n-1)|g\rangle\langle e|1(n)\rangle &= \cos \Theta_n \cos \Theta_{n-1}, \\
 \langle 1(n-1)|g\rangle\langle e|2(n)\rangle &= -\sin \Theta_n \sin \Theta_{n-1}.
 \end{aligned}$$

По физическому смыслу это выражения для амплитуд переходов  $|i(n)\rangle \rightarrow |j(n-1)\rangle$ , вызываемых оператором Линдблада спонтанного перехода. Поскольку этот оператор не меняет числа фотонов в моде, спонтанные переходы  $|i(n)\rangle \rightarrow |j(n-2)\rangle$ ,  $|i(n)\rangle \rightarrow |j(n-3)\rangle$  и т.д. оказываются невозможными.

Если мы интересуемся спектральным составом спонтанного излучения, то заметим прежде всего, что при распаде

голого атома с рис. 23 частоты испущенных фотонов оказываются вблизи  $\omega_0$  – частоты перехода в атоме. В одетом атоме для двух пар состояний с рис. 24 имеются четыре характерных частоты для четырёх переходов (315). Для первых двух переходов разницы энергий соответствующих уровней

$$\omega \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)} - \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2 n} \right), \quad (315)$$

а для третьего и четвёртого переходов имеем

$$\omega \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)} + \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2 n} \right). \quad (316)$$

Если изначально приготовлен достаточно широкий по  $n$  "пакет" одетых состояний, в спектре спонтанного испускания присутствуют линии, центрированные на частотах (315) и (316) для многих  $n$ . Заметим в противном случае, что если ширина пакета мала по сравнению с положением его центра<sup>8</sup>, частоты оказываются практически равными  $\omega$ , а частоты (316) с хорошей точностью совпадают с

$$\omega \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2 \langle n \rangle}. \quad (317)$$

Спонтанные переходы вызывают медленное опускание пакета возбуждённых одетых состояний по лесенке уровней. Можно, однако, пренебречь этим фактом пока ширина пакета остаётся малой в сравнении с расстоянием его центра от основного уровня. Ситуация позволяет говорить о почти стационарном (точнее – квазистационарном) процессе спонтанных переходов, когда атом постоянно получает энергию от

---

<sup>8</sup>Такова ситуация, например, с приготовлением начального состояния  $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$  при  $|\alpha| \gg 1$  как в прошлой лекции.

фотонной моды и до истощения этого источника ещё далеко. Такой процесс называется резонансной флуоресценцией. Её спектр, как мы видим состоит из трёх компонент: центральной на частоте моды и двух боковых на частотах (317). Ясно, что эта структура, известная как триплет Раутиана-Моллоу, различима, когда ширины компонент триплета, определяемые  $\gamma$ , малы по сравнению с расстоянием между компонентами:

$$\gamma \ll \Omega \doteq \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2 \langle n \rangle}. \quad (318)$$

В рамках используемого нами предположения о большом  $\langle n \rangle$ , значительно превышающем ширину пакета, расщепления верхней и нижней пар уровней на рис. 24 почти одинаковы, т.е. в пределах пакета структура одетых уровней оказывается практически периодичной. Поэтому для описания резонансной флуоресценции достаточно всего одной пары уровней (см. рис. 25), отвечающим одетым состояниям с "забвением" числа фотонов в моде:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos \Theta |e\rangle + \sin \Theta |g\rangle, \\ |2\rangle &= -\sin \Theta |e\rangle + \cos \Theta |g\rangle, \end{aligned} \quad (319)$$

где  $\Theta \doteq \Theta_{\langle n \rangle}$ . Трём типам возможных переходов между уровнями отвечают три компоненты триплета.

**Статистика резонансной флуоресценции.** Весьма любопытной оказывается статистика фотоиспусканий в компоненты триплета. В общем случае изучение статистики фотоиспусканий является в квантовом смысле дополнительным к изучению спектра испущенного излучения, поскольку в последнем случае спектральная фильтрация излучения требует тем больше времени, чем более детальная информация о спектре представляет интерес. Ясно, что говорить о времени испускания фотона в таких условиях невозможно. Симметрич-

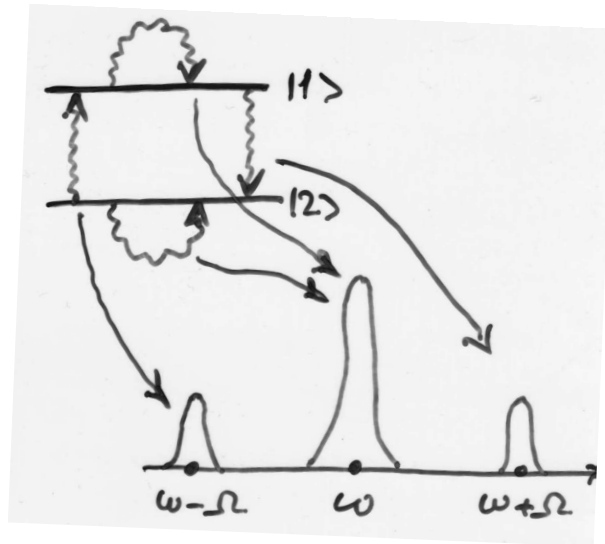


Рис. 25.

ным образом изучение статистики предполагает как можно более точную локализацию во времени события фотоиспускания с неизбежной потерей информации о частоте фотона. Это обстоятельство уже обсуждалось при изложении глауберовской теории фотоотсчётов. Изучение статистики фотоиспусканий в компоненты триплета Раутиана-Моллоу является своеобразным компромиссным вариантом – предполагается достаточно грубая, селекция спонтанного излучения по спектральным диапазонам, содержащим компоненты триплета, а внутри этих диапазонов уже изучается статистика событий. Если ввести  $\Gamma$  – ширину грубой спектральной селекции, то сказанное предполагает выполнение двойного неравенства

$$\gamma \ll \Gamma \ll \Omega, \quad (320)$$

уточняющего (318). Выразим оператор Линдблада  $|g\rangle\langle e|$

спонтанного распада через одетые состояния (320):

$$|g\rangle\langle e| = \sum_{\sigma=0,\pm} \hat{L}_\sigma. \quad (321)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 &= \cos \Theta \sin \Theta (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|), \\ \hat{L}_- &= -\sin \Theta^2 |1\rangle\langle 2|, \\ \hat{L}_+ &= \cos \Theta^2 |2\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (322)$$

Сравнение с рис. 25 обнаруживает, что  $\hat{L}_0$  отвечает за испускание в центральную компоненту триплета,  $\hat{L}_-$  – в левую и  $\hat{L}_+$  – в правую компоненты. Выражение (313) (опуская  $\gamma$ ) в терминах операторов принимает вид

$$\left(\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right)_{spont} = \sum_{\sigma=0,\pm} \sum_{\sigma'=0,\pm} \left( \hat{L}_\sigma \hat{\rho} \hat{L}_{\sigma'}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\sigma'}^\dagger \hat{L}_\sigma, \hat{\rho} \} \right). \quad (323)$$

Члены в правой части, содержащие операторы с  $\sigma \neq \sigma'$ , отвечают неопределённости компоненты триплета, в которую произошло фотоиспускание. В ситуации грубой спектральной селекции такие неопределённости практически исключены и мы можем полагать

$$\left(\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right)_{spont} \simeq \sum_{\sigma=0,\pm} \left( \hat{L}_\sigma \hat{\rho} \hat{L}_\sigma^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_\sigma^\dagger \hat{L}_\sigma, \hat{\rho} \} \right). \quad (324)$$

Это так называемое секулярное приближение. В его рамках мы определим основные черты покомпонентной статистики резонансной флуоресценции.

При экспериментальном изучении статистики фотоиспусканий должны присутствовать три счётчика с номерами для

спонтанных квантов, испущенных в соответствующие компоненты триплета. Показания счётчиков меняются в процессе наблюдения резонансной флуоресценции. Целесообразно рассматривать флуоресцирующий атом и счётчики как единую эволюционирующую систему. Будем описывать её множеством операторов  $\hat{\varrho}_t^{(n_-, n_0, n_+)}$ , где  $n_-$ ,  $n_0$  и  $n_+$  – показания счётчиков. Если просуммировать эти операторы для всех возможных  $n_\sigma$ , мы получаем статистический оператор атома:

$$\hat{\varrho}_t = \sum_{n_-=0}^{\infty} \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_+=0}^{\infty} \hat{\varrho}_t^{(n_-, n_0, n_+)}. \quad (325)$$

С другой стороны, взятие следа по состояниям атома даёт вероятность данных показаний счётчиков:

$$p_t^{(n_-, n_0, n_+)} = \text{Tr} \hat{\varrho}_t^{(n_-, n_0, n_+)}. \quad (326)$$

Статистика фотоиспусканий заключена в этом распределении.

В правой части (324) первое (так называемое "сэндвичное") слагаемое описывает преобразование статистического оператора атома при квантовом скачке – спонтанном испускании фотона в ту или иную компоненту триплета Раутиана-Моллоу. Показание соответствующего счётчика должно увеличиться на 1. Слагаемые антикоммутатора в отвечают членам ухода из данного состояния атома и счётчиков в результате спонтанного распада. Эти соображения позволяют написать следующее "расширенное" кинетическое уравнение для  $\hat{\varrho}_t^{(n_-, n_0, n_+)}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \hat{\varrho}_\tau^{(n_-, n_0, n_+)} + i[\hat{H}, \hat{\varrho}_\tau^{(n_-, n_0, n_+)}] = \\ & = \hat{L}_- \hat{\varrho}_\tau^{(n_- - 1, n_0, n_+)} \hat{L}_-^\dagger + \hat{L}_0 \hat{\varrho}_\tau^{(n_-, n_0 - 1, n_+)} \hat{L}_0^\dagger + \hat{L}_+ \hat{\varrho}_\tau^{(n_-, n_0, n_+ - 1)} \hat{L}_+^\dagger - \end{aligned} \quad (327)$$



$$-\frac{1}{2} \sum_{\sigma} \{ \hat{L}_{\sigma}^{\dagger} \hat{L}_{\sigma}, \hat{\varrho}_{\tau}^{(n-, n_0, n_+)} \}.$$

Здесь  $\tau = \gamma t$ ,  $\hat{H} = \Omega(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)/2\gamma$  (нуль энергии выбран между уровнями одетых состояний). Для решения воспользуемся операторным обобщением метода производящей функции. А именно, введём оператор

$$\hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x}) \equiv \hat{Q}_{\tau}(x_-, x_0, x_+) \doteq \sum_{n_-=0}^{\infty} \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_+=0}^{\infty} x_-^{n_-} x_0^{n_0} x_+^{n_+} \hat{\varrho}_{\tau}^{(n-, n_0, n_+)}. \quad (328)$$

Уравнение для этого оператора получается из (327):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x}) + i[\hat{H}, \hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x})] = \sum_{\sigma} \left( x_{\sigma} \hat{L}_{\sigma} \hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x}) \hat{L}_{\sigma}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\sigma}^{\dagger} \hat{L}_{\sigma}, \hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x}) \} \right) \quad (329)$$

Замечаем, что если все счётчики при  $t = 0$  были выставлены на ноль,

$$\hat{Q}_0(\mathbf{x}) = \hat{\varrho}_0, \quad (330)$$

где  $\hat{\varrho}_0$  – начальный статистический оператор атома. В случае

$$\hat{\varrho}_0 = q_1 |1\rangle\langle 1| + q_2 |2\rangle\langle 2| \quad (331)$$

решение для производящей функции  $Q_{\tau}(\mathbf{x})$  – следа производящего оператора – оказывается следующим

$$Q_{\tau}(\mathbf{x}) \doteq Tr \hat{Q}_{\tau}(\mathbf{x}) = \exp[(2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta x_0 - 1)\tau/2] \left( \cosh[\lambda(x_+ x_-)\tau] + \right) \quad (332)$$

$$+ \frac{[2x_+ \cos^4 \Theta - \cos 2\Theta]q_1 + [2x_- \sin^4 \Theta + \cos 2\Theta]q_2}{2\lambda(x_+x_-)} \sinh[\lambda(x_+x_-)\tau] \Bigg).$$

Здесь  $\lambda(z) = \sqrt{\cos^2 2\Theta + (z/4) \sin^4 2\Theta}/2$ . Имея  $Q_\tau(x_-, x_0, x_+)$  легко получить производящие функции для каждого счётчика. Для этого достаточно положить  $x_\sigma = 1$  для двух остальных счётчиков. Замечаем, что функция  $Q_\tau(\mathbf{x})$  из (326) допускает разложение

$$Q_\tau(x_-, x_0, x_+) = Q_\tau(1, x_0, 1)Q_\tau(x_-, 1, x_+), \quad (333)$$

где

$$Q_\tau(1, x_0, 1) = \exp[(x_0 - 1) \sin^2(2\Theta)\tau/4]. \quad (334)$$

Физический смысл этого соотношения в том, что фотоиспускания в боковые компоненты триплета статистически независимы от фотоиспусканий в центральную компоненту. При этом для центральной компоненты мы всегда имеем пуассонову статистику, что следует из тейлоровского разложения (334).

Для определения статистики боковых компонент надо конкретизировать  $q_1$  и  $q_2$  из (331). Если считать  $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}^{(st)}$ , то

$$q_1 = \frac{\sin^4(\Theta)}{\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta)}, \quad q_2 = \frac{\cos^4(\Theta)}{\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta)}. \quad (335)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} & Q_\tau(x_-, 1, 1)|_{x_-=x} = Q_\tau(1, 1, x_+)|_{x_+=x} = \\ & = e^{-\lambda(1)\tau} \left( \cosh[\lambda(x)\tau] + \frac{\lambda^2(1) + \lambda^2(x)}{2\lambda(1)\lambda(x)} \sinh[\lambda(x)\tau] \right). \end{aligned} \quad (336)$$

Статистика для боковых компонент оказывается одинаковой. Вычисление первой производной функции (336) при  $x = 1$  даёт среднее число фотоиспусканий:

$$\langle n_{\pm} \rangle_{\tau} = \frac{\cos^4(\Theta) \sin^4(\Theta)}{\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta)} \tau. \quad (337)$$

Вторые производные позволяют вычислить квадрат дисперсии числа фотоиспусканий. Он выходит на линейную функцию времени при больших  $\tau$ :

$$\langle (\Delta n_{\pm})^2 \rangle_{\tau} = \langle n_{\pm} \rangle_{\tau} \left( 1 - \frac{2 \cos^4(\Theta) \sin^4(\Theta)}{(\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta))^2} \right). \quad (338)$$

Видно, что статистика для боковых компонент триплета оказывается субпуассоновской. Это можно было предугадать на основе следующих простых соображений. Как видно из рис. 25, переходы в боковые компоненты должны чередоваться, хотя могут перемежаться любым числом фотоиспусканий в центральную компоненту. Если испускание в правую компоненту условно назвать выстрелом, то испускание в левую становится перезарядкой и наоборот. С этим связано эффективное "расталкивание" во времени событий фотоиспусканий в каждую из боковых компонент.

Данные рассуждения наводят на мысль, что подсчёт боковых фотоиспусканий без их различения должен обнаружить суперпуассоновскую статистику. Это действительно так. Вычисляя первую и вторую производные функции  $Q_{\tau}(x, 1, x)$ , мы получаем

$$\langle n \rangle_{\tau} = \frac{2 \cos^4(\Theta) \sin^4(\Theta)}{\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta)} \tau \quad (339)$$

и (при больших  $\tau$ )

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle_\tau = \langle n \rangle_\tau \left[ 1 + \left( \frac{\cos^4(\Theta) - \sin^4(\Theta)}{\cos^4(\Theta) + \sin^4(\Theta)} \right)^2 \right]. \quad (340)$$

Проведённые в своё время эксперименты обнаружили согласие с (338) и (340).

## 13 Лекция 13

**Пример из квантовой механики.** Объяснение феномена "сжатого света", о котором пойдёт речь далее, целесообразно начать с квантового механического осциллятора. Удобно временно вернуться к записи формул, не опуская  $\hbar$ . Гамильтониан осциллятора

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}\hat{q}^2. \quad (341)$$

Координата и импульс связаны известным коммутационным соотношением  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ . В терминах операторов рождения и уничтожения колебательного кванта,

$$\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}, \quad \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}, \quad (342)$$

гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left( \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \frac{1}{2} \right). \quad (343)$$

Пусть изначально осциллятор находится в основном состоянии (вакууме по отношению к колебательным квантам)  $|\text{vac}_0\rangle$ :  $\hat{a}_0|\text{vac}_0\rangle = 0$ . Волновая функция основного состояния

$$\psi_0(q) = \left( \frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{m\omega_0}{2\hbar} q^2 \right). \quad (344)$$

Предположим, что частота осциллятора очень быстро, за время  $\tau \ll \omega_0^{-1}, \omega_1^{-1}$  (уточнение этого условия будет сделано позднее), меняется с  $\omega_0$  на  $\omega_1$ . Теперь гамильтониан

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega_1^2}{2}\hat{q}^2 = \hbar\omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right). \quad (345)$$

Операторы уничтожения и рождения новых квантов,

$$\hat{a}_1 = \sqrt{\frac{m\omega_1}{2\hbar}}\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega_1\hbar}}, \quad \hat{a}_1^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_1}{2\hbar}}\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega_1\hbar}}, \quad (346)$$

линейными соотношениями связаны со старыми операторами:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} + \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right)\hat{a}_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right)\hat{a}_0^\dagger, \quad (347)$$

$$\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right)\hat{a}_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} + \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}\right)\hat{a}_0^\dagger.$$

Операция уничтожения нового кванта оказывается своего рода суперпозицией уничтожения и рождения старых квантов. Удобно ввести параметр  $r$  так что  $\sqrt{\omega_1/\omega_0} = e^r$ . Тогда соотношения (347) принимают вид

$$\hat{a}_1 = \cosh r \hat{a}_0 + \sinh r \hat{a}_0^\dagger, \quad \hat{a}_1^\dagger = \sinh r \hat{a}_0 + \cosh r \hat{a}_0^\dagger. \quad (348)$$

Они известны как преобразования Боголюбова.

При достаточно быстрой перестройке гамильтониана не успевают измениться состояние осциллятора, но оно уже не является вакуумом по отношению к  $\hat{a}_1$ , и обязательно появляются колебательные кванты:

$$\langle vac_0 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | vac_0 \rangle = \sinh^2 r = \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} - 2 \right) > 0. \quad (349)$$

Среднее значение энергии (его, разумеется, надо вычислять с учётом нулевых колебаний) возрастает (убывает) при  $\omega_1 > \omega_0$  ( $\omega_1 < \omega_0$ ):

$$\langle vac_0 | \hat{H}_0 | vac_0 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_0, \quad \langle vac_0 | \hat{H}_1 | vac_0 \rangle = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \right). \quad (350)$$

Эти соотношения позволяют уточнить критерий быстрой перестройки. За время перестройки  $\tau$  набег действия должен быть малым по сравнению с  $\hbar$  как для гамильтониана  $\hat{H}_0$ , так и  $\hat{H}_1$ . В случае  $\omega_1 < \omega_0$  достаточно условия  $\tau\omega_0 \ll 1$ , а при  $\omega_1 \gg \omega_0$  требуется более сильное неравенство  $\tau\omega_1^2/\omega_0 \ll 1$ .

Обратимся к квантовым флуктуациям координаты и импульса осциллятора. Рассмотрим сначала ситуацию до перестройки гамильтониана. Средние значения этих наблюдаемых равны нулю:  $\langle vac_0 | \hat{p} | vac_0 \rangle = 0 = \langle vac_0 | \hat{q} | vac_0 \rangle$ . Для вариаций получаем

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle_0 = \langle vac_0 | \hat{q}^2 | vac_0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \langle vac_0 | (\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)^2 | vac_0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \quad (351)$$

и

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_0 = \langle vac_0 | \hat{p}^2 | vac_0 \rangle = -\frac{\hbar m \omega_0}{2} \langle vac_0 | (\hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger)^2 | vac_0 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0}{2}. \quad (352)$$

Произведение этих вариаций,

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_0 \langle (\Delta q)^2 \rangle_0 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (353)$$

реализует минимум соотношения неопределённостей Гейзенберга. Теперь рассмотрим ситуацию после перестройки, считая, что она произошла при  $t = 0$ . В этот момент состояние практически не изменилось, но перестало быть стационарным. Поэтому средние теперь в общем случае зависят от времени:

$$\langle \dots \rangle_1 = \langle vac_0 | e^{i\hat{H}_1 t} \dots e^{-i\hat{H}_1 t} | vac_0 \rangle. \quad (354)$$

Средние значения координаты и импульса остаются нулевыми:  $\langle \hat{p} \rangle_1 = 0 = \langle \hat{q} \rangle_1$ . Для вариаций получаем

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle_1 = \frac{\hbar}{2m\omega_1} \langle vac_0 | (e^{-i\omega_1 t} \hat{a}_1 + e^{i\omega_1 t} \hat{a}_1^\dagger)^2 | vac_0 \rangle = \quad (355)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega_1} \left( \cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\omega_1 t \right)$$

и

$$\begin{aligned} \langle (\Delta p)^2 \rangle_1 &= -\frac{\hbar m \omega_1}{2} \langle vac_0 | (e^{-\omega_1 t} \hat{a}_1 - e^{\omega_1 t} \hat{a}_1^\dagger)^2 | vac_0 \rangle = \quad (356) \\ &= \frac{\hbar m \omega_1}{2} \left( \cosh 2r - \sinh 2r \cos 2\omega_1 t \right) \end{aligned}$$

Вариация  $\langle (\Delta q)^2 \rangle_1$  с периодом  $\pi/2\omega_1$  "гуляет" между

$$\frac{\hbar}{2m\omega_1} e^{2r} = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \quad \text{и} \quad \frac{\hbar}{2m\omega_1} e^{-2r} = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}. \quad (357)$$

При  $\omega_0 < \omega_1$  второе значение оказывается меньше, т.е. флуктуации координаты периодически оказываются "сжатыми" по сравнению с величиной до перестройки гамильтониана. Это прообраз явления "сжатого" состояния фотонной моды. Вариация импульса аналогичным образом пульсирует между

$$\frac{\hbar m \omega_1}{2} e^{-2r} = \frac{\hbar m \omega_0}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\hbar}{2m\omega_0} e^{2r} = \frac{\hbar m \omega_1}{2} \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}. \quad (358)$$

Произведение вариаций

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_1 \langle (\Delta q)^2 \rangle_1 = \frac{\hbar^2}{4} \left( \cosh^2 2r - \sinh^2 2r \cos^2 2\omega_1 t \right). \quad (359)$$

достигает минимума Гейзенберга  $\hbar^2/4$  при  $\cos 2\omega_1 t = \pm 1$  и максимума  $\hbar^2 \cosh^2 2r/4$  при  $\cos 2\omega_1 t = 0$ .

Перед возвращением в квантовую оптику полезно резюмировать результаты примера с механическим осциллятором. В рассмотрении фигурировали два гамильтониана и две соответствующие пары операторов рождения-уничтожения



колебательных квантов, связанных преобразованием Боголюбова (348). Это преобразование возникло в контексте модели быстрого изменения частоты осциллятора, когда начальное вакуумное состояние  $|vac_0\rangle$  не успевает измениться. Оно оказывается уже не вакуумом по отношению к новым колебательным квантам, т.е.  $\langle vac_0|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|vac_0\rangle \neq 0$ . Ясно, что верно и обратное утверждение. Основное состояние гамильтониана  $\hat{H}_1$ ,  $|vac_1\rangle$ , содержит кванты типа 0:  $\langle vac_1|\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0|vac_1\rangle \neq 0$ . Каждое из состояний является нормальным вакуумом по отношению к "своим" квантам, т.е.  $\hat{a}_0|vac_0\rangle = 0 = \hat{a}_1|vac_1\rangle$ , и тем, что называется "сжатым вакуумом" для квантов другого типа. Два типа операторов рождения-уничтожения, связанные некоторым соотношением вида (348), могут появиться и в случае, когда гамильтониан осциллятора (или гармонической фотонной моды) не меняется, но состояние трансформируется некоторым определённым образом, что позволяет назвать его "сжатым" по отношению к операторам рождения и уничтожения квантов осциллятора (моды). Эта ситуация имеет место в квантовой оптике и рассматривается далее.

**Напряжённость поля в терминах квадратур.** Удобно приблизить формализм описания гармонической квантованной моды к формализму только что рассмотренного механического осциллятора. Сходство этих двух систем заложено ещё в самой процедуре канонического квантования поля. Запишем гейзенберговский оператор напряжённости в безразмерном виде

$$\hat{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right) \quad (360)$$

и перейдём к форме с косинусом и синусом вместо комплексных экспонент:

$$\hat{E}(t) = \hat{Q} \cos(\omega t) + \hat{P} \sin(\omega t). \quad (361)$$

Здесь

$$\hat{Q} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{P} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (362)$$

– так называемые квадратуры. Это эрмитовы операторы с соотношением коммутации

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i. \quad (363)$$

Данное выражение позволяет трактовать  $\hat{Q}$  как безразмерный аналог оператора "координаты" моды-осциллятора, а  $\hat{P}$  – как оператор его "импульса". Отмеченное сходство проявляется также в соотношении неопределённостей

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle \geq \frac{1}{4}. \quad (364)$$

Важность когерентных состояний в квантовой оптике побуждает взглянуть на них в контексте соотношения (374). Рассмотрим дисперсию квадратуры  $\hat{Q}$  (для  $\hat{P}$  всё аналогично). Эта дисперсия, выраженная через операторы рождения и уничтожения, имеет вид

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle + \langle\hat{a}^2\rangle + 2\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle\right) - \frac{1}{2}\left(\langle\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle\right)^2 + \frac{1}{2} \quad (365)$$

Если усреднение в этом выражении осуществляется по когерентному состоянию, т.е.  $\langle\dots\rangle = \langle\alpha|\dots|\alpha\rangle$ , сумма в первых круглых скобках совпадает со вторым слагаемым. Следовательно,

$$\langle\alpha|(\Delta\hat{Q})^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2}. \quad (366)$$

Для  $\langle\alpha|(\Delta\hat{P})^2|\alpha\rangle$  получается то же самое. Видно, что реализуется минимально допустимое произведение квадратов

дисперсии (374), причём реализуется симметричным образом по отношению к квадратурам. *Состояние называется сжатым, если  $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle < 1/2$  или  $\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle < 1/2$ .* Покажем, что явление сжатия оказывается чисто квантовым, т.е. может иметь место только в состояниях с неположительной  $P$ -функцией Глаубера. Пусть  $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle < 1/2$ . Можно заключить из (398), что

$$\left(\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle + \langle\hat{a}^2\rangle + 2\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle\right) < \left(\langle\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle\right)^2 \quad (367)$$

В общем случае

$$\langle\dots\rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) \langle\alpha|\dots|\alpha\rangle d\alpha^2. \quad (368)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int P(\alpha, \alpha^*) \langle\alpha|\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - (\langle\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle)^2|\alpha\rangle d\alpha^2 = \\ & = \int P(\alpha, \alpha^*) \left(\alpha^{*2} + \alpha^2 + 2\alpha^*\alpha - (\langle\alpha\rangle_P + \langle\alpha^*\rangle_P)^2\right) d\alpha^2 = \quad (369) \\ & = \int P(\alpha, \alpha^*) \left(\alpha^* + \alpha - \langle\alpha\rangle_P - \langle\alpha^*\rangle_P\right)^2 d\alpha^2 < 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\langle\dots\rangle_P = \int P(\alpha, \alpha^*) \dots d\alpha^2. \quad (370)$$

Поскольку подынтегральное выражение в последней строке (402) содержит произведение  $P$ -функции с квадратом действительной величины, отрицательность результата интегрирования свидетельствует о существовании области  $\alpha$ -пространства с

Предварительно заметим, что выражение (361) неявно выделяет начало отсчёта времени, поскольку  $\hat{E}(0) = \hat{Q}$ . Это ограничение не совсем удобно. Введём параметр  $\varphi$  – фазу, позволяющую эффективно сдвигать начало отсчёта времени:

$$\hat{E}(t) = \hat{Q}(\varphi) \cos(\omega t - \varphi) + \hat{P}(\varphi) \sin(\omega t - \varphi). \quad (371)$$

Здесь новые квадратуры

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\varphi) &= \hat{Q} \cos \varphi + \hat{P} \sin \varphi, \\ \hat{P}(\varphi) &= -\hat{Q} \sin \varphi + \hat{P} \cos \varphi \end{aligned} \quad (372)$$

получены из исходных поворотом на угол  $\varphi$  в плоскости, образованной  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$ . Соотношение коммутации для новых квадратур имеет, естественно, ту же форму, что и (373):

$$[\hat{Q}(\varphi), \hat{P}(\varphi)] = i. \quad (373)$$

В терминах повернутых квадратур верны легко проверяемые соотношения

$$\hat{E}(t) = \hat{Q}(\omega t) = \hat{P}(\omega t - \pi/2). \quad (374)$$

**Параметрический процесс. Двухмодовое сжатие.** Процесс параметрического преобразования частоты является первой стадией получения оптических сжатых состояний фотонной моды. Предположим, что в некоторой нелинейной среде плоская световая волна с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  порождает две новые волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  (см. рис. 26). В этом процессе должно выполняться условие так называемого фазового синхронизма

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (375)$$

и условие волнового синхронизма

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (376)$$

Последнее равенство справедливо, строго говоря, только в бесконечной среде.

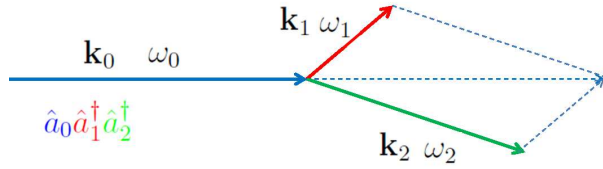


Рис. 26.

Введя операторы рождения и уничтожения фотонов для всех трёх мод, нетрудно записать гамильтониан параметрического процесса:

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^2 \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \lambda \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \lambda^* \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2. \quad (377)$$

Наряду с процессом, отражённым на рис. 26, в нём присутствует и обратный процесс слияния фотонов из мод 1 и 2 (см. рис. 27) с рождением фотона моды 0.

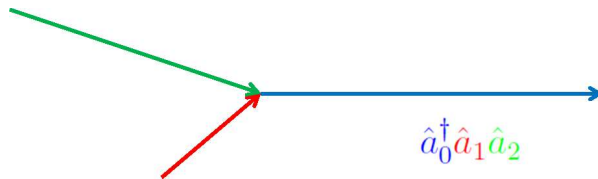


Рис. 27.

Переход к представлению взаимодействия преобразует операторы  $\hat{a}_i \rightarrow \hat{a}_i \exp(-i\omega_i t)$  и в силу условия фазового синхронизма (375) приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = -i\hat{V}|\Psi(t)\rangle, \quad (378)$$

где  $\hat{V} = \lambda\hat{a}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger + \lambda^*\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2$ .

Предположим, что мода с номером 0 (так называемая волна накачки) содержит много фотонов в состоянии, близком к когерентному. Это позволяет рассматривать поле этой моды классически и заменить оператор  $\hat{a}_0$  на комплексную амплитуду  $\alpha_0$ , а  $\hat{a}_0^\dagger$  – на  $\alpha_0^*$ . После этого упрощения оператор в (378) принимает вид  $\hat{V} = \lambda\alpha_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger + \lambda^*\alpha_0^*\hat{a}_1\hat{a}_2$ . Вектор состояния  $|\Psi_{out}\rangle$  квантованной моды на выходе из нелинейной среды связан с вектором состояния  $|\Psi_{in}\rangle$  на входе унитарным преобразованием

$$|\Psi_{out}\rangle = \hat{S}(\eta)|\Psi_{in}\rangle. \quad (379)$$

Здесь

$$\hat{S}(\eta) = \exp(-i\hat{V}\tau) = \exp\left(\eta\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \eta^*\hat{a}_1\hat{a}_2\right). \quad (380)$$

Параметр  $\eta = -i\lambda\alpha_0\tau$  содержит  $\tau$  – время прохождения излучения через нелинейную среду.

Ориентируясь на рассмотренный выше пример с квантовым механическим осциллятором, следует ожидать сжатия флуктуаций при появлении в задаче двух пар операторов рождения-гибели, связанных преобразованием Боголюбова. В механическом примере вторая пара возникла при преобразовании гамильтониана осциллятора. Теперь мы имеем дело с преобразованием состояний (379) (гамильтониан мод 1 и 2

до и после этого преобразования одинаков; это "выключенный" для удобства оператор  $\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ ). Состояние преобразуется в картине Шредингера. С гейзенберговской точки зрения  $|\Psi_{in}\rangle$  остаётся неизменным, а преобразуются операторы:

$$\hat{a}_i \mapsto \hat{a}_i(\eta) \doteq \hat{S}^\dagger(\eta) \hat{a}_i \hat{S}(\eta), \quad \hat{a}_i^\dagger \mapsto \hat{a}_i^\dagger(\eta) \doteq \hat{S}^\dagger(\eta) \hat{a}_i^\dagger \hat{S}(\eta). \quad (381)$$

Здесь  $i = 1, 2$ . Во всех случаях мы имеем дело со структурой типа  $\exp(\hat{A}) \hat{B} \exp(-\hat{A})$ . Докажем равенство

$$\exp(\hat{A}) \hat{B} \exp(-\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{A}^{(n)}, \hat{B}]. \quad (382)$$

Здесь

$$\hat{A}^{(n+1)} \doteq [\hat{A}, [\hat{A}^{(n)}, \hat{B}]] \quad (383)$$

и

$$\hat{A}^{(0)} \doteq \hat{B}. \quad (384)$$

Для доказательства (382) введём

$$\hat{B}(x) \doteq \exp(\hat{A}x) \hat{B} \exp(-\hat{A}x). \quad (385)$$

Легко проверить

$$\frac{d^n}{dx^n} \hat{B}(x) = \exp(\hat{A}x) [\hat{A}^{(n)}, \hat{B}] \exp(-\hat{A}x), \quad (386)$$

из чего следует выражение

$$\hat{B}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \hat{B}(x)|_{x=0}, \quad (387)$$

совпадающее с (382). Применение этого общего соотношения к ситуации вычисления  $\hat{a}_1(\eta)$  с  $\hat{A} = -\eta \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \eta^* \hat{a}_1 \hat{a}_2$  даёт

$$[\hat{A}^{(2k)}, \hat{a}_1] = |\eta|^{2k} \hat{a}_1, \quad [\hat{A}^{(2k+1)}, \hat{a}_1] = \eta |\eta|^{2k} \hat{a}_2^\dagger. \quad (388)$$

В результате получаем

$$\hat{a}_1(\eta) = \cosh r \hat{a}_1 + e^{2i\Theta} \sinh r \hat{a}_2^\dagger. \quad (389)$$

где  $r \exp(2i\Theta) = \eta$ . Поскольку форма вхождений операторов мод 1 и 2 в  $\tilde{S}(\eta)$  одинакова, имеем

$$\hat{a}_2(\eta) = \cosh r \hat{a}_2 + e^{2i\Theta} \sinh r \hat{a}_1^\dagger. \quad (390)$$

Соотношения для сопряжённых операторов очевидны.

Видно, что возникло некое обобщение преобразований Боголюбова. В нём участвуют операторы двух мод и появилась комплексность в виде фазового множителя при вторых слагаемых в правых частях. Это преобразование описывает явление так называемого двухмодового сжатия. Оно может послужить инструментом создания сжатого состояния одной моды, в частности, сжатого вакуума. Для этого также понадобятся делители пучка – одни из простейших оптических устройств.

**Отступление: физика светоделителей.** Рассмотрим преобразование двух ортогональных оптических пучков, падающих под углом  $\pi/4$  на плоско-параллельную стеклянную пластинку посеребрённую с одной стороны (см. рис. 28) Пока можно говорить о классической оптике и оперировать комплексными амплитудами пучков,  $\alpha_{in}$  и  $\beta_{in}$  на входе,  $\alpha_{out}$  и  $\beta_{out}$  на выходе. Связь между амплитудами линейная, т.к в каждый из пучков на выходе может дать вклад частично отражённые и прошедшие входные пучки:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{out} \\ \beta_{out} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_{in} \\ \beta_{in} \end{pmatrix} \quad (391)$$

Свойства матрицы  $M$  следуют из очевидного требования сохранения энергии пучков:

$$|\alpha_{out}|^2 + |\beta_{out}|^2 = (\alpha_{out}^*, \beta_{out}^*) \begin{pmatrix} \alpha_{out} \\ \beta_{out} \end{pmatrix} = \quad (392)$$



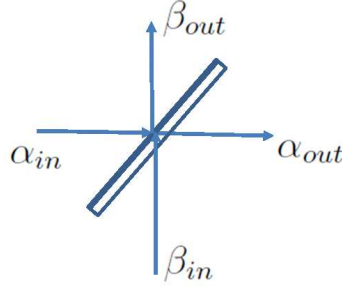


Рис. 28.

$$(\alpha_{in}^*, \beta_{in}^*) M^\dagger M \begin{pmatrix} \alpha_{in} \\ \beta_{in} \end{pmatrix} = |\alpha_{in}|^2 + |\beta_{in}|^2$$

Из этого следует унитарность матрицы:  $M^\dagger M = 1$ . Это позволяет представить её в виде

$$M = e^{i\phi} \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \quad (393)$$

где  $\phi$  – некоторая фаза, а два комплексных числа  $u$  и  $v$  связаны соотношением  $|u|^2 + |v|^2 = 1$ . Ещё немного сузить множество допустимых матриц позволяет предположение о симметрии процесса преобразования пучков при обращении времени. При такой инверсии направления распространения пучков меняются на противоположные, а амплитуды претерпевают комплексное сопряжение (см. рис. 29). Кроме (391) мы теперь имеем ещё одну связь амплитуд

$$\begin{pmatrix} \beta_{in}^* \\ \alpha_{in}^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \beta_{out}^* \\ \alpha_{out}^* \end{pmatrix} \quad (394)$$

При записи этого соотношения необходимо аккуратно сопоставить картины 28 и 29, чтобы правильно разместить ампли-

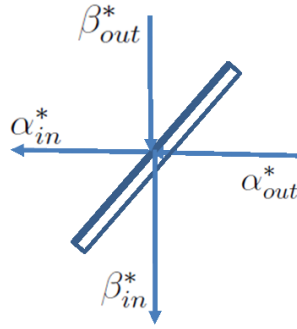


Рис. 29.

туды в столбцах. Совместность (391) и (394) требует действительности параметра  $u$  (**проверьте**). Так называемый сбалансированный делитель пучка с равной вероятностью отражает и пропускает излучение. Мы не будем явно учитывать общий фазовый сдвиг, вносимый светоделителем в каждый из выходных пучков. Матрица  $M$ , используемая далее имеет вид

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (395)$$

Знаки на побочной диагонали размещены так, что матрица описывает реальное действие пластинки, слой серебра на которую напылён сверху. При переходе к квантовой оптике амплитуды пучков заменятся, как обычно, операторам уничтожения фотонов в соответствующих модах.

**Получение одномодового сжатого вакуума.** Идея процесса отражена на схеме рис. 30. Видно, что операторы мод от входа до выхода трансформируются трижды: преобразование на входном (сбалансированном) светоделителе с

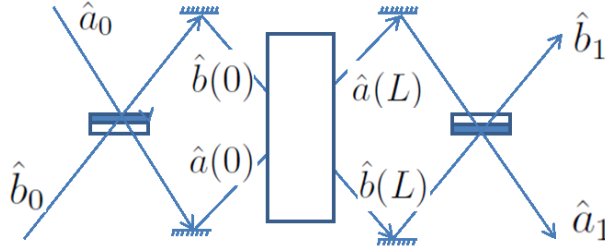


Рис. 30.

помощью матрицы (395)

$$\hat{a}(0) = (\hat{a}_0 + \hat{b}_0)/\sqrt{2}, \quad \hat{b}(0) = (-\hat{a}_0 + \hat{b}_0)/\sqrt{2}; \quad (396)$$

преобразование в нелинейной среде ( $L$  – толщина среды, для простоты мы берём соотношения (389) и (390) без комплексных факторов)

$$\hat{a}(L) = \cosh r \hat{a}(0) + \sinh r \hat{b}(0)^\dagger, \quad \hat{b}(L) = \cosh r \hat{b}(0) + \sinh r \hat{a}(0)^\dagger \quad (397)$$

и преобразование на выходном светоделителе (ориентированном иначе, чем светоделитель на входе)

$$\hat{a}_1 = (-\hat{b}(L) + \hat{a}(L))/\sqrt{2}, \quad \hat{b}_1 = (\hat{b}(L) + \hat{a}(L))/\sqrt{2}. \quad (398)$$

В итоге имеем связь фотонных операторов на входе и выходе устройства:

$$\hat{a}_1 = \cosh r \hat{a}_0 - \sinh r \hat{a}_0^\dagger, \quad \hat{b}_1 = \cosh r \hat{b}_0 + \sinh r \hat{b}_0^\dagger \quad (399)$$

Заметим, что теперь в преобразованиях Боголюбова фигурируют операторы мод  $a$  и  $b$  по отдельности. Соотношения для квадратур моды  $a$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1^{(a)} &\doteq (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger)/\sqrt{2} = e^{-r} \hat{Q}_0^{(a)} \\ \hat{P}_1^{(a)} &\doteq i(-\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger)/\sqrt{2} = e^r \hat{P}_0^{(a)} \end{aligned} \quad (400)$$

Для квадратур моды  $b$  получаются аналогичные соотношения, в которых факторы  $e^{-r}$  и  $e^r$  переставлены. В каждой моде получено сжатие. Из (374) следует картина эволюции:

$$\hat{Q}_1^{(a)}(\omega t) = \cos \omega t e^{-r} \hat{Q}_0^{(a)} + \sin \omega t e^r \hat{P}_0^{(a)} \quad (401)$$

Необходимо помнить, что всё рассмотрение происходит в рамках концепции Гейзенберга. Состояние при этом не меняется. Пусть  $|\Psi_{in}\rangle = |vac\rangle$ . Усреднение по этому состоянию даёт вариацию квадратуры  $\hat{Q}_1^{(a)}(\omega t)$ , которая есть одновременно напряжённость поля:

$$\langle (\Delta \hat{Q}_1^{(a)}(\omega t))^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{-2r} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} e^{2r} \sin^2 \omega t. \quad (402)$$

Быстрая зависимость дисперсии от времени делает непосредственное наблюдение чередований большого и малого шума напряжённости моды в сжатом вакуумном состоянии невозможным. Очевидно, что для регистрации феномена сжатия необходимо каким-то способом устранить осцилляции на оптической частоте.

**Регистрация сжатого вакуума.** Рассмотрим схему рис. 31. На светоделителе происходит "смещение" пучков моды  $a_0$ , находящейся в состоянии сжатого вакуума  $\hat{S}(r)|vac\rangle_{a_0}$ , и моды  $b_0$ , приготовленной в когерентном состоянии  $|\beta\rangle_{b_0}$  с контролируемой фазой параметра  $\beta = |\beta|e^{i\phi}$ . Возможность этого контроля символически представлена на рисунке двумя прозрачными клинами, относительный сдвиг которых меняет толщину образуемой ими пластинки. Измеряется разность энергий, регистрируемых детекторами на выходе светоделителя. Оператор этой разности, пропорционален  $\hat{I} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ . Делитель пучка сбалансированный. Поэтому для

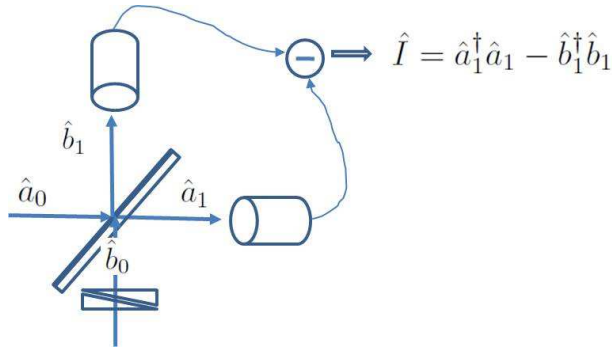


Рис. 31.

фотонных операторов мод на выходе имеем

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a}_0 + \hat{b}_0}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_1 = \frac{-\hat{a}_0 + \hat{b}_0}{\sqrt{2}} \quad (403)$$

В терминах операторов входных мод

$$\hat{I} = \hat{a}_0^\dagger \hat{b}_0 - \hat{b}_0^\dagger \hat{a}_0. \quad (404)$$

Переход в этом операторе к представлению Гейзенберга не привнесёт зависимость от времени, если частоты мод одинаковы, поскольку появляющийся множитель  $e^{i\omega t}$  будет компенсироваться множителем  $e^{-i\omega t}$ . Необходимость именно такой компенсации отмечалось ранее. Теперь надо показать, что в свойствах регистрируемого сигнала находит отражение факт сжатия. Для этого необходимо вычислить шум. Усреднение выполняется по состоянию  $|\Psi_{in}\rangle = \hat{S}(r)|vac\rangle_{a_0} \otimes |\beta\rangle_{b_0}$ . Поскольку оно распадается на произведение состояний мод  $a_0$  и  $b_0$ , процедура усреднения упрощается. Среднее величина сигнала нулевая,  $\langle \hat{I} \rangle = 0$ , поскольку  $\langle \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^\dagger \rangle = 0$  для сжатого вакуума. Для дисперсии сигнала

имеем

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta I)^2 \rangle &= \langle \hat{I}^2 \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \rangle \langle \hat{b}_0^2 \rangle + \langle \hat{a}_0^2 \rangle \langle \hat{b}_0^{\dagger 2} \rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{b}_0 \hat{b}_0^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \rangle \langle \hat{b}_0^\dagger \hat{b}_0 \rangle = \quad (405) \\
 &= |\beta|^2 \cosh^2 r + (1 + |\beta|^2) \sinh^2 r + |\beta|^2 \sinh 2r \cos 2\phi.
 \end{aligned}$$

Видно, что помимо постоянного уровня шума сигнала, в нём присутствует составляющая, зависящая от контролируемой фазы. Меняя её, можно управлять величиной дисперсии (405) при условии ненулевого параметра сжатия  $r$ .

### Список рекомендуемой литературы

1. *Киллин С.Я.* Квантовая оптика (поля и их детектирование). Минск: Навука і Тэхніка, 1990.
2. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
3. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
4. *Шляйх В.П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005.
5. Оптика наноструктур (под ред. А.В. Фёдорова), С.-Петербург, "Недра 2005.
6. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum Noise. Springer, 2000.
7. *Yamamoto Y., Imamoglu A.* Mesoscopic Quantum Optics. John Willey and Sons, Inc., 1999.
8. *Vedral V.* Modern Foundations of Quantum Optics. Imperial College Press, 2005.
9. *Bachor H.-A., Ralph T.C.* A Guide to Experiments in Quantum Optics. WILEY-VCH Verlag, 2004.
10. *Haroche S., Raimond J.-M.* Exploring the Quantum. Oxford University Press, 2006.
11. *Менский М.Б.* Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001.